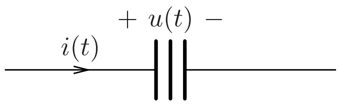
TSKS21 Signaler, information och bilder

Lösningar till tentan 2017-06-09

Mikael Olofsson, mikael.olofsson@liu.se

1

Vi har alltså följande figur, där vi har hittat på en egen symbol för komponenten i fråga.



Sambandet mellan spänningen $u(t)$ över komponenten och strömmen $i(t)$ genom den skulle alltså vara

$$i(t) = K \frac{d^2}{dt^2} u(t).$$

a. Det enklaste sättet att bestämma impedansen är att använda sig av fouriertransform. Efter att ha fouriertransformerat uttrycket, så får vi

$$I(\omega) = K \cdot (j\omega)^2 U(\omega).$$

Impedansen $Z(\omega)$ ges så av kvoten

$$Z(\omega) = \frac{U(\omega)}{I(\omega)} = \frac{1}{K \cdot (j\omega)^2} = -\frac{1}{K\omega^2}.$$

Not: Denna lösning utnyttjar att en derivering utgör ett LTI-system. En lösning som följer härledningen av impedanser som jag gav på föreläsningarna duger förstås också. Den är en aning bökigare, men resultatet blir då förstås detsamma.

b. Ur impedansuttrycket ovan får vi

$$K = -\frac{1}{\omega^2 Z(\omega)}$$

Impedansen $Z(\omega)$ har enhet Ω i vanlig ordning, och vinkelfrekvensen ω har enhet s^{-1}. Följaktligen har K enheten s^2/Ω, vilket är det svar vi förväntar oss.

Not: Nu kan denna enhet uttryckas på några olika sätt, och andra korrekta sätt att uttrycka enheten ger förstås också poäng på uppgiften. Exempelvis är Ω inte en grundenhet i SI-systemet. Uttryckt i SI-systemets grundenheter så har K enheten $\mathrm{A}^2\mathrm{s}^5/\mathrm{kgm}^2$.

Svar: a. $Z(\omega) = -1/\omega^2 K$. **b.** s^2/Ω.

2

Enhetsanalys är en viktig förmåga hos en ingenjör, och för all del även för en fysiker. Det ger möjlighet till rimlighetstest av ett resultat. Här bygger alltsammans på de integralsamband som gäller, och att om man integrerar med avseende på en storhet, så innebär det i termer av enheter att den storhetens enhet multipliceras med integrandens enhet. Passiva linjära nät (RLC) är LTI-system. Alltså ges alla samband mellen olika spänningar och strömmar av faltningar. Låt insignalen betecknas $v(t)$, eftersom det är en spänning, och låt utsignalen betecknas $i(t)$ eftersom det är en ström. Motsvarande fouriertransformer betecknar vi $V(\omega)$ och $I(\omega)$. I vanlig ordning, låt vidare impulssvaret betecknas $h(t)$, stegsvaret betecknas $g(t)$ och frekvenssvaret betecknas $H(\omega)$.

a. Frekvenssvaret ges av

$$H(\omega) = \frac{I(\omega)}{V(\omega)}.$$

De två signalernas fouriertransformer ges av integralerna

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t)e^{-j\omega t}\, dt,$$

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

Strömmen $i(t)$ har enhet $\big[\mathrm{A}\big]$ och spänningen $v(t)$ har enhet $\big[\mathrm{V}\big]$. Vi integrerar med avseende på tiden som har enhet $\big[\mathrm{s}\big]$. Alltså har $I(\omega)$ enhet $\big[\mathrm{As}\big]$ och $V(\omega)$ har enhet $\big[\mathrm{Vs}\big]$. Slutligen innebär det att $H(\omega)$ har enhet $\big[\mathrm{As/Vs}\big] = \big[\mathrm{A/V}\big] = \big[\Omega^{-1}\big]$.

b. Frekvenssvaret ges av integralen

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

Vi har ovan bestämt att $H(\omega)$ har enhet $[\Omega^{-1}]$. För att detta ska gå ihop, så måste $h(t)$ ha enhet $[\Omega^{-1}\mathrm{s}^{-1}]$.

c. Stegsvaret $g(t)$ ges ur impulssvaret av integralen

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau.$$

Variabeln τ i integralen är en tid, och har alltså enhet $[\mathrm{s}]$. Alltså har stegsvaret enhet $[\Omega^{-1}]$. Strikt sett så följer detta av att enhetssteget är enhetslöst, vilket visas i deluppgift e. Detta eftersom $g(t)$ är faltningen mellan enhetssteget och impulssvaret.

d. För enhetsimpulsen $\delta(t)$ gäller sambandet

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)\, d\tau.$$

för tillräckligt snälla $x(t)$. Integralen ger upphov till enheten $[\mathrm{s}]$. För att enheterna på båda sidorna av ekvationssystemet ska vara lika, måste alltså enhetsimpulsen ha enheten $[\mathrm{s}^{-1}]$. Notera att detta allmänt innebär att enhetsimpulsens enhet är inversen av argumentets enhet. Alltså: Om vi i vanlig ordning låter ω vara vinkelfrekvens, så har ω enhet $[\mathrm{s}^{-1}]$. Då har alltså $\delta(\omega)$ enhet $[\mathrm{s}]$.

e. Slutligen ges enhetssteget $u(t)$ ur enhetsimpulsen av integralsambandet

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau.$$

Även här tillför integralen enheten $[\mathrm{s}]$. Vi har ovan bestämt att enhetsimpulsen har enheten $[\mathrm{s}^{-1}]$. Alltså är enhetssteget enhetslöst. Det är det oavsett argumentets enhet.

Svar:

a. $[\Omega^{-1}]$
b. $[\Omega^{-1}\mathrm{s}^{-1}]$
c. $[\Omega^{-1}]$
d. $[\mathrm{s}^{-1}]$
e. Enhetslöst

3

a. Vi har ett LTI-system med impulssvar $h[n]$, för vilket gäller

$$\sum_n |h[n]| = \sum_n |x[-n]| = 7,$$

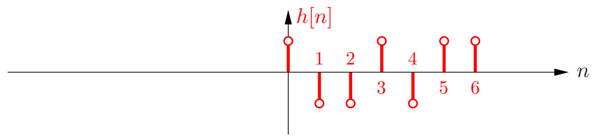
vilket är ändligt. Alltså är systemet stabilt.

b. Impulssvaret

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] - \delta[n-2] + \delta[n-3] - \delta[n-4] + \delta[n-5] + \delta[n-6]$$

är nollskilt för $0 \le n < 7$. Eftersom systemet är LTI och impulssvaret är noll för alla negativa n, så är systemet kausalt.

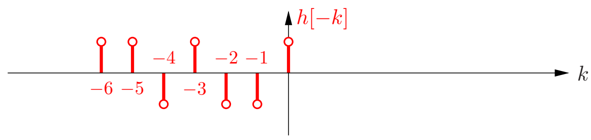
c. Eftersom insignalen är periodisk med period 7, så är utsignalen också periodisk med period 7. Det räcker alltså att bestämma en period av utsignalen. Vi har följande impulssvar:



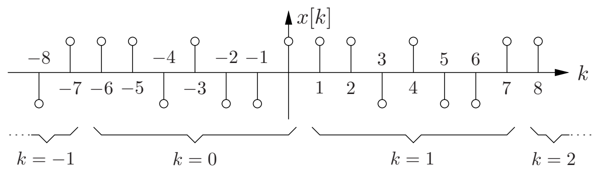
Utsignalen $y[n]$ ges av faltningen

$$y[n] = \sum_k x[k]h[n-k].$$

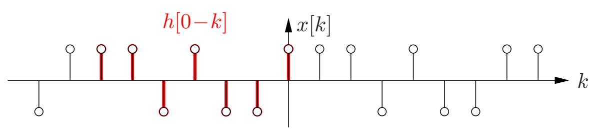
Vi ritar först en hjälpfigur:



Vi har insignalen $x[n] = \sum_k h[7k-n]$, vilken ser ut så:

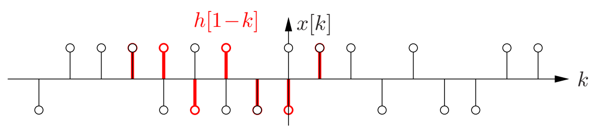


Vi betraktar faltningssumman för olika n, och börjar med $n = 0$:



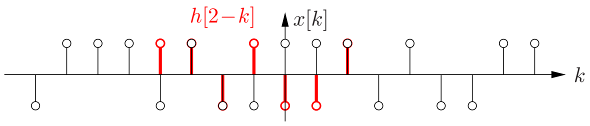
$$y[0] = 1^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + 1^2 = 7.$$

$n = 1$:



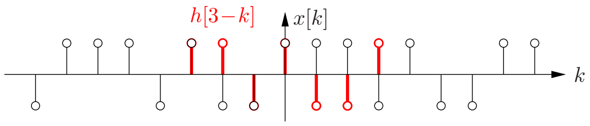
$$y[1] = 1^2 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + (-1)^2 + 1\cdot(-1) + 1^2 = -1.$$

$n = 2$:



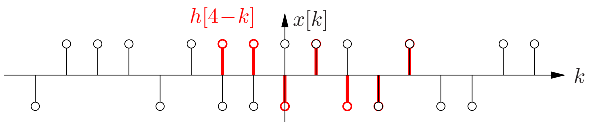
$$y[2] = (-1)\cdot 1 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + 1^2 = -1.$$

$n = 3$:



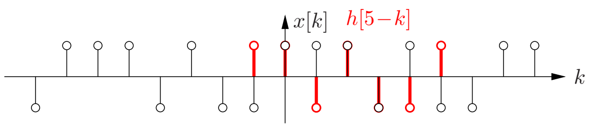
$$y[3] = 1^2 + (-1)\cdot 1 + (-1)^2 + 1^2 + 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = -1.$$

$n = 4$:



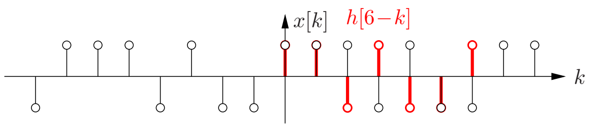
$$y[4] = (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1^2 + 1\cdot(-1) + (-1)^2 + 1^2 = -1.$$

$n = 5$:



$$y[5] = (-1)\cdot 1 + 1^2 + 1\cdot(-1) + 1^2 + (-1)^2 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = -1.$$

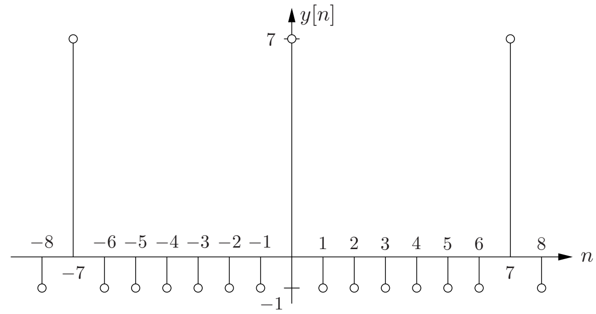
$n = 6$:



$$y[6] = 1^2 + 1^2 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)^2 + (-1)\cdot 1 = -1.$$

Därmed har vi gått igenom en hel period, och mönstret upprepar sig. Totalt har vi alltså utsignalen

$$y[n] = \begin{cases} 7, & 7 \mid n, \\ -1, & 7 \nmid n. \end{cases}$$

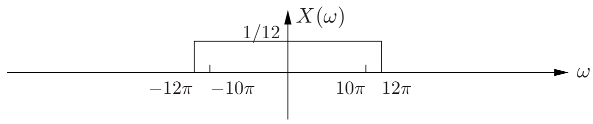


Kommentar: Signalen som vi betraktar här är ett exempel på en så kallad m-sekvens. Sådana är t.ex. byggstenar till de spridningssekvenser som används att separera olika användare i GSM. De har också tillämpningar i GPS-systemet. Sekvensen i detta exempel är betydligt kortare än de som används i GSM och GPS.

Svar:
a. Stabilt.
b. Kausalt.
c. Se grafen av $y[n]$ ovan.

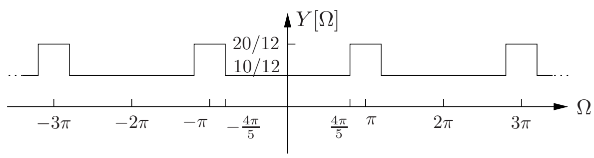
4
Vi har ett system som samplar en tidskontinuerlig signal med samplingsfrekvens 10 Hz och sedan omedelbart rekonstruerar signalen idealt. Vi har insignalen $x(t) = \mathrm{sinc}(12t)$. Enligt tabell 5.2:16, så är signalens spektrum

$$X(\omega) = \begin{cases} 1/12, & |\omega| \le 12\pi, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$



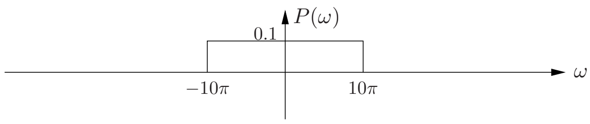
Signalen ska samplas med samplingsfrekvens $f_s = 10\,\mathrm{Hz}$, vilket motsvarar samplings-vinkelfrekvensen $\omega_s = 2\pi f_s = 20\pi\,\mathrm{s}^{-1}$. I figuren ovan har därför halva samplings-vinkelfrekvensen $\omega_s/2 = 10\pi\,\mathrm{s}^{-1}$ markerats. Efter samplingen får vi den tidsdiskreta signalen $y[n] = x(nT)$, där vi har samplingsperioden $T = 1/f_s = 0.1$ s. Vid sampling gäller Poissons summationsformel, formelbladet under Sampling:

$$Y[\Omega] = \frac{1}{T}\sum_k X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right)$$

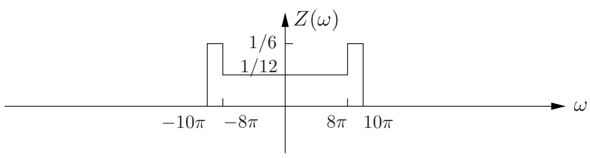


Vid puls-amplitud-modulering får vi som resultat signalen $z(t)$, vars spektrum ges av sambandet $Z(\omega) = P(\omega)Y[\omega T]$. Vid ideal rekonstruktion har vi vidare

$$P(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \le \omega/2, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases} = \begin{cases} 0.1, & |\omega| \le 10\pi, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$



Resultatet av detta:



Utsignalens spektrum kan skrivas som $Z(\omega) = Z_1(\omega) - Z_2(\omega)$, där vi har

$$Z_1(\omega) = \begin{cases} 1/6, & |\omega| \le 10\pi, \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases}$$
$$Z_2(\omega) = \begin{cases} 1/12, & |\omega| \le 8\pi, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Enligt tabell 5.2:16, så har vi inverstransformerna

$$z_1(t) = \frac{5}{3}\operatorname{sinc}(10t) \qquad \text{och} \qquad z_2(t) = \frac{2}{3}\operatorname{sinc}(8t).$$

Enligt linjäriteten hos fouriertransformen (tabell 5.4), så har vi då utsignalen

$$z(t) = z_1(t) - z_2(t) = \frac{5}{3}\operatorname{sinc}(10t) - \frac{2}{3}\operatorname{sinc}(8t)$$

Svar: $\frac{5}{3}\operatorname{sinc}(10t) - \frac{2}{3}\operatorname{sinc}(8t)$

5
Vi har blivit givna kodens parametrar: Längd $n = 40$, antal informationsbitar $k = 10$ och minavstånd $d = 16$.

a. Kodens takt ges av $R = k/n = 1/4$.

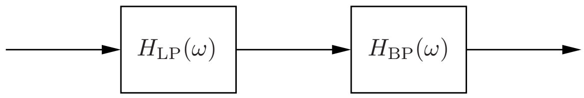
b. Kodens felrättningsförmåga ges av $t = \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor = 7$.

c. Kodens feldetekteringsförmåga ges av $v = d - 1 = 15$.

Svar:

a. Takt: $R = \frac{1}{4}$
b. Felrättningsförmåga: $t = 7$
c. Feldetekteringsförmåga: $v = 15$

6
Det system vi har att analysera ser alltså ut så:



Här är $H_{\mathrm{LP}}(\omega)$ det ideala lågpassfiltret med gränsfrekvens $f_1 = 600\,\mathrm{Hz}$, medan $H_{\mathrm{BP}}(\omega)$ det ideala bandpassfiltret med gränsfrekvenser $f_2 = 400\,\mathrm{Hz}$ och $f_3 = 800\,\mathrm{Hz}$. Motsvarande gränsvinkelfrekvenser är då

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = 1200\pi\,\mathrm{s}^{-1},$$
$$\omega_2 = 2\pi f_2 = 800\pi\,\mathrm{s}^{-1},$$
$$\omega_3 = 2\pi f_3 = 1600\pi\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Alltså har vi

$$H_{\mathrm{LP}}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_1, \\ 0, & \text{f.ö.,} \end{cases}$$
$$H_{\mathrm{BP}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_2 < |\omega| < \omega_3, \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$$

a. Först ska vi bestämma vilken typ av frekvensselektivt filter som kaskadkopplingen ovan utgör. Det totala filtrets frekvenssvar är då

$$H_{\mathrm{LP}}(\omega)H_{\mathrm{BP}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_2 < |\omega| < \omega_1, \\ 0, & \text{f.ö.,} \end{cases}$$

eftersom vi har $\omega_2 < \omega_1 < \omega_3$. Kaskadkopplingen utgör alltså ett bandpassfilter.

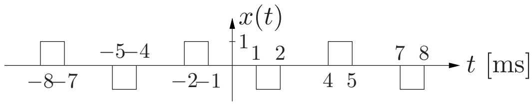
b. Av uttrycket ovan ser vi att det resulterande filtret har den undre gränsfrekvensen

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 400\,\mathrm{Hz}$$

och den övre gränsfrekvensen

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 600\,\mathrm{Hz}.$$

c. Insignalens grundfrekvens är inversen av dess periodtid. Den givna periodiska insignalen var följande:



Ur grafen ser vi att insignalen har periodtid $t = 6\,\text{ms}$, och alltså grundfrekvens

$$f_0 = \frac{1}{6 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{6}\,\text{kHz}$$

d. Slutligen ska vi bestämma utsignalen från det resulterande filtret. Insignalens grundvinkelfrekvens är

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{\pi}{3} \cdot 10^3 \quad [\text{s}^{-1}]$$

Deltonernas vinkelfrekvenser utgör multiplar av ω_0. Låt k vara ett heltal. Den enda multipel som faller inom vinkelfrekvensintervallet $\omega_2 < k\omega_0 < \omega_1$ är den med $k = 3$. Alltså är vi endast intresserade av fourierseriekoefficienten D_3 hos insignalen $x(t)$. Den ges av

$$\begin{aligned}
D_3 &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-j3\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{10^3}{6}\left\{\int_{-2\cdot 10^{-3}}^{-1\cdot 10^{-3}} e^{-j10^3\pi t}\,dt - \int_{1\cdot 10^{-3}}^{2\cdot 10^{-3}} e^{-j10^3\pi t}\,dt\right\} \\
&= \frac{10^3}{-6}\left\{\left[\frac{e^{-j10^3\pi t}}{j10^3\pi}\right]_{-2\cdot 10^{-3}}^{-1\cdot 10^{-3}} - \left[\frac{e^{-j10^3\pi t}}{j10^3\pi}\right]_{1\cdot 10^{-3}}^{2\cdot 10^{-3}}\right\} \\
&= \frac{j}{6\pi}\left(e^{j\pi} - e^{j2\pi} - e^{-j2\pi} + e^{-j\pi}\right) \\
&= \frac{j}{3\pi}\big(\cos(\pi) - \cos(2\pi)\big) = -\frac{j2}{3\pi}
\end{aligned}$$

Denna delton har då amplituden $\hat{X}_3$ och fasvridning ϕ_3 för vilka gäller

$$\begin{aligned}
\hat{X}_3 &= 2|D_3| = \frac{4}{3\pi}, \\
\phi_3 &= \frac{\pi}{2} + \arg\{D_3\} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Denna delton, som vi kallar $x_3(t)$ är då

$$x_3(t) = \frac{4}{3\pi}\sin(10^3\pi t).$$

Filtrets frekvenssvar i vinkelfrekvensen $3\omega_0 = 10^3\pi$ är 1. Principen sinus-in-sinus-ut ger då utsignalen

$$y(t) = x_3(t) = \frac{4}{3\pi}\sin(10^3\pi t).$$

Svar:

- **a.** Kaskadkopplingen utgör ett bandpassfilter.
- **b.** Gränsfrekvenserna är $f_2 = 400\,\text{Hz}$ och $f_1 = 600\,\text{Hz}$.
- **c.** Grundfrekvensen är $f_0 = \frac{1}{6}\,\text{kHz}$
- **d.** $y(t) = \frac{4}{3\pi}\sin(10^3\pi t)$

7a. Från lektion 10: `b =` $\boxed{1 \mid 1}$`/2` och `d =` $\boxed{1 \mid -1}$. `b2:=b*b. d2=b*d, sy=b2*d2`$^{\mathrm{T}}$. Notera att koordinatsystemet är högerhand och därför måste `-sy` andvändas. `d2` är centrala differensen.

b. Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{\pi(x+N)}{2N}\sin\left(\frac{\pi(x+N)y}{2N}\right) \quad . \qquad (1)$$

c. sin() motsvarar två anti-symmetriska impulser på $v = \pm(x+N)/4/N$. Kvadreringen motsvarar faltningen vilket ger impulser vid $v = 0$ och $v = \pm(x+N)/2/N$. Därmed kommer för $x > N/2$ impulserna leda till vikning ($v = \pm(N-x)/2/N$).

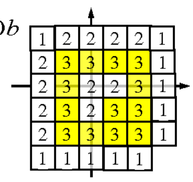
d. Två gånger filtering med `b2*b2`$^{\mathrm{T}}$.

Svar: —

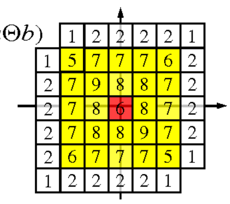
8a. Se figur.

b. Se figur.

1. $a \Theta b$



2. $a \oplus (a \Theta b)$



c. Resultaten är identiska förutom pixel (0,0) och (-2,2) (röda) som är 0 för dilationen och 1 för trösklade korrelationsresultatet. Korrelationsresultatet är symmetriskt i (0,0).

Svar: —