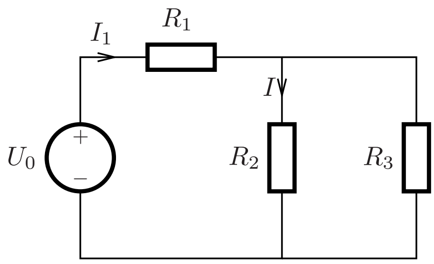
TSKS21 Signaler, information och bilder

Lösningar till tentan 2016-08-24

Mikael Olofsson, mikael.olofsson@liu.se

1
Vi har alltså följande krets, där vi har fört in strömmen I_1 utöver de givna storheterna $U_0 = 9\,\mathrm{V}$, $R_1 = 800\,\Omega$, $R_2 = 600\,\Omega$, $R_3 = 1200\,\Omega$, och den sökta strömmen I.



Vi börjar med att bestämma ersättningsresistansen för resistansnätet som är kopplat till spänningskällan. Där är R_2 och R_3 parallellkopplade, och den parallellkopplingen är seriekopplad med R_1. Alltså får vi ersättningsresistansen

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 1200\,\Omega.$$

Strömmen I_1 ges av Ohms lag i R, dvs

$$I_1 = U_0/R = 7.5\,\mathrm{mA}.$$

Den sökta strömmen I ges av strömdelning av I_1 mellan resistanserna R_2 och R_3, dvs

$$I = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_1 = 5\,\mathrm{mA}.$$

Svar: Den sökta strömmen är $I = 5\,\mathrm{mA}$.

2
Låt $u(t)$ och $i(t)$ vara spänningen över respektive strömmen genom induktansen med matchande referensriktningar. Notera då att $u(t)$ inte betecknar enhetssteget här. Då gäller

$$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t),$$

där L är induktansen. Låt nu $U(\omega)$ och $I(\omega)$ vara fouriertransformerna av spänningen $u(t)$ respektive strömmen $i(t)$. Enligt Mandal/Asif, tabell 5.4, så gäller då

$$U(\omega) = Lj\omega I(\omega),$$

Impedansen ges av kvoten

$$\frac{U(\omega)}{I(\omega)} = j\omega L$$

Svar: —

3
För impulssvaret har vi

$$h[k] = 2^{-k}u[k-1],$$

där $u[k]$ är det tidsdiskreta enhetssteget.

a. Ett tidsdiskret LTI-system är stabilt om och endast om

$$\sum_k \big|h[k]\big|$$

är ändlig. Vi kontrollerar det:

$$\sum_k \big|h[k]\big| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

vilket uppenbarligen är ändligt. Systemet är alltså stabilt.

b. Ett tidsdiskret LTI-system är kausalt om och endast om vi har $h[k] = 0$ för alla negativa k. För det givna systemet har vi $h[k] = 0$ för $k \leq 0$. Systemet är alltså kausalt.

c. Eftersom systemet är LTI, så ges stegsvaret $g[k]$ av

$$g[k] = \sum_{m=-\infty}^{k} h[m] = (1 - 2^{-k})u[k-1]$$

d. Vi har insignalen $x[k] = 3^{-k}u[k]$. Eftersom systemet är LTI, så har vi också

$$\begin{aligned} y[k] &= (x * h)[k] = \sum_m x[m]h[k-m] \\ &= \sum_m 3^{-m}u[m]2^{-(k-m)}u[k-m-1] \end{aligned}$$

Vi noterar att vi har $u[m]u[k-m-1] = 0$ för alla m för $k < 1$. Alltså har vi $y[k] = 0$ för alla $k < 1$. Kvar har vi att betrakta fallet $k \geq 1$. Då har vi alltså

$$\begin{aligned} y[k] &= \sum_{m=0}^{k-1} 3^{-m}2^{-(k-m)} = 2^{-k}\sum_{m=0}^{k-1}(2/3)^m \\ &= 2^{-k}\frac{1-(2/3)^k}{1-2/3} = 3(2^{-k}-3^{-k}) \end{aligned}$$

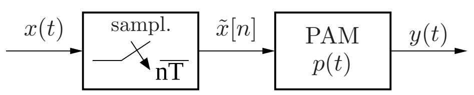
för $k \geq 1$. Totalt har vi alltså utsignalen

$$y[k] = 3(2^{-k} - 3^{-k})u[k-1].$$

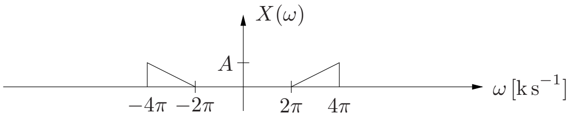
Svar:

a. Ja.
b. Ja.
c. $g[k] = (1 - 2^{-k})u[k-1]$
d. $y[k] = 3(2^{-k} - 3^{-k})u[k-1]$

4
Vi har följande system.



Vi är givna en insignal med följande spektrum. I uppgiften gavs spektrum uttryckt i naturlig frekvens f. Då vi i kursen är vana att istället använda oss av naturlig vinkelfrekvens, så återger vi spektrum på det viset här.

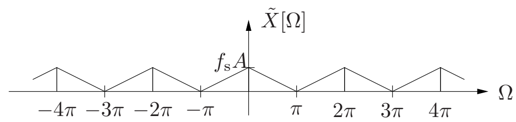


Vi ska bestämma och rita spektrum för signalerna $\tilde{x}[k]$ och $y(t)$.

Låt $\tilde{X}[\theta]$ vara den samplade signalens spektrum. Då ger Poissons summationsformel oss

$$\tilde{X}[\Omega] = f_s \sum_m X\big(f_s(\Omega - m2\pi)\big).$$

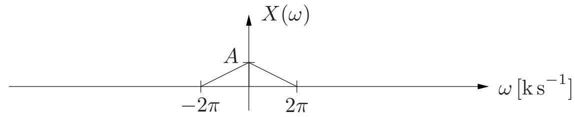
Detta ger oss följande graf.



Slutligen ska denna signal rekonstrueras idealt. I frekvensdomänen motsvaras det av en multiplikation med

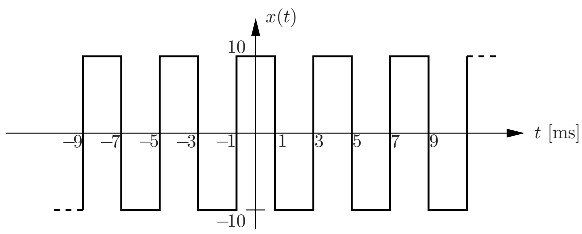
$$P(\omega) = \begin{cases} f_s^{-1}, & |\omega| < \pi f_s, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Den resulterande signalens spektrum är därför som i figuren nedan.



Svar: Spektra enligt ovan.

5
Vi har följande insignal:



Signalen har periodtid $T_0 = 4\,\text{ms}$ och grundvinkelfrekvens $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 500\pi\,\text{s}^{-1}$. Filtret som signalen passerar har följande frekvenssvar.

$$H(\omega) = \begin{cases} 2, & 600\pi\,\text{s}^{-1} \leq |\omega| \leq 1600\pi\,\text{s}^{-1}, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Filtret släpper alltså igenom vinkelfrekvenser i intervallet $600\pi\,\text{s}^{-1} \leq |\omega| \leq 1600\pi\,\text{s}^{-1}$. Signalen är periodisk och dess fourierserieutveckling innehåller då endast frekvenser som är multiplar av grundvinkelfrekvensen $\omega_0 = 500\pi\,\text{s}^{-1}$. De enda multiplar av ω_0 som ligger i intervallet ifråga är

$$2\omega_0 = 1000\pi\,\text{s}^{-1} \qquad \text{och} \qquad 3\omega_0 = 1500\pi\,\text{s}^{-1}.$$

Vi behöver alltså endast betrakta dessa två vinkelfrekvenser, och alltså behöver vi bara bestämma fourierseriekomponenterna

$$D_{-3}, \qquad D_{-2}, \qquad D_2 \qquad \text{och} \qquad D_3.$$

Dessa får vi enligt formelbladet med uttrycket

$$D_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt.$$

Med $t_0 = -10^{-3}$ s får vi då

$$\begin{aligned} D_3 &= 250 \left(\int_{-10^{-3}}^{10^{-3}} 10 e^{-j3\cdot 500\pi t}\, dt - \int_{10^{-3}}^{3\cdot 10^{-3}} 10 e^{-j3\cdot 500\pi t}\, dt \right) \\ &= -\frac{20}{3\pi}. \\ D_{-3} &= D_3^* = -\frac{20}{3\pi}. \end{aligned}$$

samt

$$\begin{aligned} D_2 &= 250 \left(\int_{-10^{-3}}^{10^{-3}} 10 e^{-j2\cdot 500\pi t}\, dt - \int_{10^{-3}}^{3\cdot 10^{-3}} 10 e^{-j2\cdot 500\pi t}\, dt \right) \\ &= 0. \\ D_{-2} &= D_2^* = 0. \end{aligned}$$

Sålunda är det endast vinkelfrekvensen $3\omega_0$ som ger ett bidrag till utsignalen. Filtret förstärker med faktorn 2 i sitt passband, varför utsignalen till slut är

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \left(D_{-3} e^{-j3\omega_0 t} + D_3 e^{j3\omega_0 t} \right) \\ &= -\frac{80}{3\pi} \cos(3\omega_0 t) = \frac{80}{3\pi} \cos(1500\pi t - \pi), \end{aligned}$$

där vi har ersatt minustecknet med fasvridningen $-\pi$ radianer.

Svar: $y(t) = \frac{80}{3\pi} \cos(1500\pi t - \pi)$

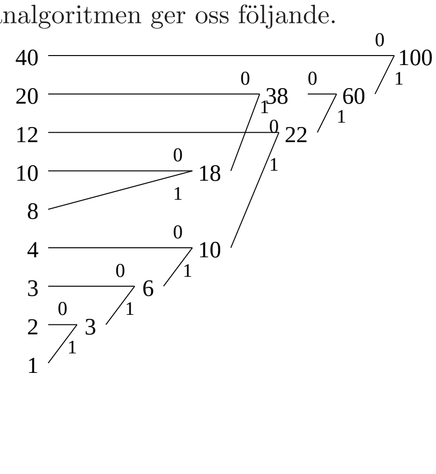
6

Se kompletteringsmaterialet 2016, sidan 70, sats 4.4. Kortfattat innebär det att det går att kommunicera över en kanal som tillför fel med godtyckligt låg resulterande felsannolikhet så länge datatakten är mindre än kanalens kapacitet.

Svar: Se ovan.

7

a. Huffmanalgoritmen ger oss följande.



Alltså har vi följande Huffmankod.

$\Pr\{a_i\}$	Kodord	l_i	$\Pr\{a_i\} l_i$
0.40	0	1	0.40
0.20	100	3	0.60
0.12	110	3	0.36
0.10	1010	4	0.40
0.08	1011	4	0.32
0.04	1110	4	0.16
0.03	11110	5	0.15
0.02	111110	6	0.12
0.01	111111	6	0.06
			$\sum = 2.57$

b. Den förväntade kodordlängden är därmed 2.57 bitar/symbol.

c. Källans entropi ges av

$$-\sum_i \Pr\{a_i\} \cdot \log_2(\Pr\{a_i\}) \approx 2.50.$$

Redundansen är därmed

$$2.57 - 2.50 = 0.07$$

bitar per symbol. Vi har 9 symboler. Kompressionskvoten ges då av

$$\frac{\log_2(9)}{2.57} \approx 1.23.$$

Svar:

a. Huffmankod enligt ovan.
b. Förväntad kodordslängd 2.57 bitar/symbol.
c. Redundans 0.07 bitar/symbol kompressionskvot 1.23.