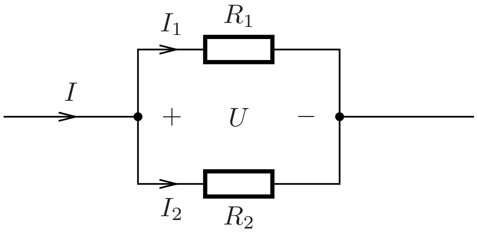
# TSKS21 Signaler, information och bilder

## Lösningar till tentan 2016-03-22

Mikael Olofsson, mikael.olofsson@liu.se

**1a.** Betrakta parallellkopplingen av två resistanser i figuren nedan.




Antagandet är att denna parallellkoppling är vidare kopplad till ett större nät, och att vi känner strömmen $I$. Vi vill nu bestämma strömmen $I_1$ genom resistansen $R_1$. Kirchhoffs strömlag i den vänstra knutpunkten ger oss sambandet

$$I = I_1 + I_2.$$

Ohms lag i de två resistanserna lyder

$$I_1 = U/R_1 \qquad\qquad I_2 = U/R_2.$$

Insatt i Kirchhoffs strömlag ovan ger detta oss

$$U = \frac{I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

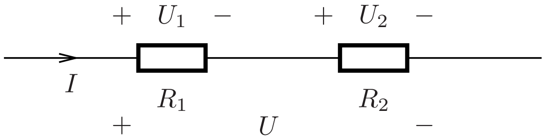
Slutligen med Ohms lag i $R_1$, får vi

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} I.$$

Alternativt kan detta skrivas

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I.$$

**b.** Betrakta seriekopplingen av två resistanser i figuren nedan.




Även här antar vi att de två ändarna av denna seriekoppling är vidare kopplad till ett större nät, och att vi känner spänningen $U$. Vi vill nu bestämma spänningen $U_1$ över resistansen $R_1$. Kirchhoffs spänningslag i kretsen ger oss sambandet

$$U = U_1 + U_2.$$

Ohms lag i de två resistanserna lyder

$$U_1 = R_1 I \qquad\qquad U_2 = R_2 I.$$

Insatt i Kirchhoffs spänningslag ovan ger detta oss

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Slutligen med Ohms lag i $R_1$, får vi

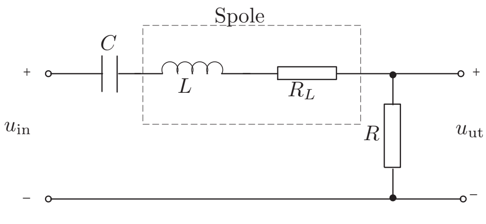
$$U_1 = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U.$$

**Svar:** Se härledning ovan.

**2**

*Detta är en av förberedelseuppgifterna till lab 1.*

Vi har följande figur.




Detta är ett växelströmsproblem, varför vi använder oss av $j\omega$-metoden. Kapacitansen och induktansen har impedanserna

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} \qquad \text{respektive} \qquad Z_L = j\omega L.$$

Inspänningen är då det komplexa talet $U_{\text{in}}$, och utspänningen är då det komplexa talet $U_{\text{ut}}$. Sambandet mellan dem ges av spänningsdelning som

$$\begin{aligned} U_{\text{ut}} &= \frac{R}{R+R_L+Z_L+Z_C} U_{\text{in}} \\ &= \frac{R}{R+R_L+j\omega L-\frac{1}{\omega C}} U_{\text{in}}, \end{aligned}$$

och motsvarande frekvenssvar är

$$H(\omega) = \frac{R}{R+R_L+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Vid resonans är imaginärdelen av frekvenssvaret noll, och enligt uppgiftsformuleringen infaller det vid resonansvinkelfrekvensen $\omega_0 = 8\pi 10^3\,\text{s}^{-1}$. Alltså har vi

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \qquad \text{och} \qquad H(\omega_0) = \frac{R}{R+R_L} = \frac{4}{10},$$

där vi i sista likheten använt informationen om spänningarnas effektivvärden. Från dessa två ekvationer får vi

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{256\pi^2} \approx 396\,\mu\text{H}, \quad R_L = \frac{3}{2}R = 1.5\,\text{k}\Omega.$$

**Svar:** $L \approx 396\,\mu$H och $R_L = 1.5\,\text{k}\Omega$.

**3**

För impulssvaret har vi

$$h[k] = \begin{cases} k, & -1 \le k < 2, \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

**a**. Ett tidsdiskret LTI-system är stabilt om och endast om

$$\sum_k |h[k]|$$

är ändlig. Vi kontrollerar det:

$$\sum_k |h[k]| = \sum_{k=-1}^{1} |n| = 2,$$

vilket uppenbarligen är ändligt. Systemet är alltså stabilt.

**b**. Ett tidsdiskret LTI-system är kausalt om och endast om vi har $h[k] = 0$ för alla negativa $k$. För det givna systemet har vi $h[-1] = 1$. Systemet är alltså inte kausalt.

**c**. Vi noterar att vi kan skriva om impulssvaret som

$$h[k] = -\delta[k+1] + \delta[k-1].$$

Eftersom systemet är LTI, så ges stegsvaret $g[k]$ av

$$g[k] = \sum_{m=-\infty}^{k} h[k] = \begin{cases} -1, & -1 \le k < 1, \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$$

**d**. Vi har insignalen $x[k] = \delta[k+1] + 2\delta[k-2]$. Eftersom systemet är LTI, så har vi också

$$\begin{aligned} y[k] &= h[k+1] + 2h[k-2] \\ &= -\delta[k+2] + \delta[k] - 2\delta[k-1] + 2\delta[k-3] \\ &= \begin{cases} -1, & k=-2, \\ 1, & k=0, \\ -2, & k=1, \\ 2, & k=3, \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases} \end{aligned}$$

**Svar:**

**a**. Ja.
**b**. Nej.
**c**. $g[k] = \begin{cases} -1, & -1 \le k < 1, \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$
**d**. $y[k] = \begin{cases} -1, & k=-2, \\ 1, & k=0, \\ -2, & k=1, \\ 2, & k=3, \\ 0, & \text{för övrigt} \end{cases}$

**4**

Vi har ett tidsdiskret LTI-system karakteriseras av differensekvationen

$$y[k] - 0.6y[k-1] = 0.4x[k].$$

Vi ska bestämma systemets utsignal $y[k]$ om insignalen är

$$x[k] = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right).$$

Då insignalen består dels av en konstant och dels av en stationär cosinus, så använder vi oss av sinus-in-sinus-ut-principen som gäller för LTI-system. För det behöver vi systemets frekvenssvar $H[\Omega]$. Vi börjar med att fouriertransformera differensekvationen, och får då

$$(1 - 0.6e^{-j\Omega})Y[\Omega] = 0.4X[\Omega],$$

där vi har använt oss av tabell 11.6, rad 7. Systemets frekvenssvar ges då av

$$H[\Omega] = \frac{Y[\Omega]}{X[\Omega]} = \frac{0.4}{1-0.6e^{-j\Omega}}.$$

För den konstanta delen av insignalen har vi vinkelfrekvensen $\Omega = 0$, och därför är vi intresserade av

$$H[0] = \frac{0.4}{1-0.6} = 1.$$

För den stationära cosinus-delen av insignalen har vi vinkelfrekvensen $\Omega = \pi/2$, och därför är vi intresserade av

$$H[\pi/2] = \frac{0.4}{1+0.6j}.$$

Belopp och argument av detta:

$$\begin{aligned} \big|H[\pi/2]\big| &= \frac{0.4}{\sqrt{1+0.6^2}} = \frac{2}{\sqrt{34}} \approx 0.343, \\ \arg\big\{H[\pi/2]\big\} &= \arg 0.4 - \arg(1+j0.6) \\ &= -\arctan(0.6) \approx -0.540. \end{aligned}$$

Slutligen ger detta oss utsignalen

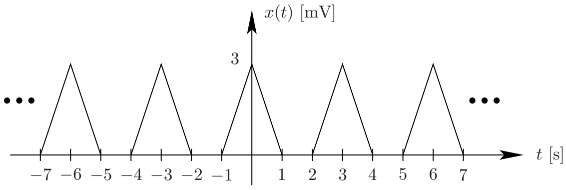
$$\begin{aligned} y[k] &= 2H[0] + \big|H[\pi/2]\big| \cos\left(\frac{\pi}{2}k + \arg\big\{H[\pi/2]\big\}\right) \\ &\approx 2 + 0.343\cos\left(\frac{\pi}{2}k - 0.540\right), \end{aligned}$$

enligt sinus-in-sinus-ut-principen.

**Svar:** $y[k] \approx 2 + 0.343\cos\left(\frac{\pi}{2}k - 0.540\right)$

**5**

Given signal:




En period av signalen kan beskrivas så:

$$x(t) = \begin{cases} 3(1-t)\cdot 10^{-3}, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2, \\ 3(-2+t)\cdot 10^{-3}, & 2 \le t < 3. \end{cases}$$

med enhet V. Sedan repeteras detta med periodtid $T = 3\,[\mathrm{s}]$. Grundvinkelfrekvensen är alltså $\omega_0 = 2\pi/3\,[\mathrm{s}^{-1}]$.

Först bestämmer vi likspänningsnivån

$$D_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} x(t)\,dt.$$

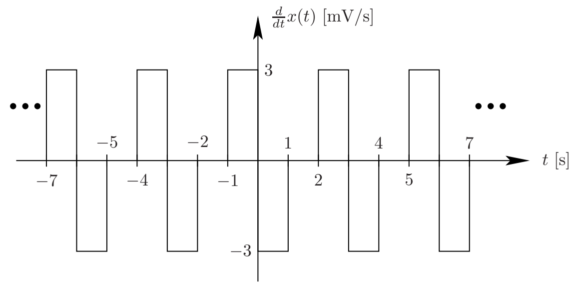
Här har vi utnyttjat signalens symmetri. Med insatta värden får vi då

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{2}{3}\int_0^1 3(1-t)\cdot 10^{-3}\,dt = \frac{2}{3}\int_0^1 3t\cdot 10^{-3}\,dt \\ &= 10^{-3}\ [\mathrm{V}] = 1\ [\mathrm{mV}]. \end{aligned}$$

Slutligen vill vi bestämma $D_n$ för nollskilda $n$. Enligt uppgiften ska vi göra det med hjälp av den givna deriveringsegenskapen. Detta gör att vi slipper partialintegration. Alltså, vi deriverar signalen och får då

$$\frac{d}{dt}x(t) = \begin{cases} -3\cdot 10^{-3}, & 0 < t < 1, \\ 0, & 1 < t < 2, \\ 3\cdot 10^{-3}, & 2 < t < 3. \end{cases}$$

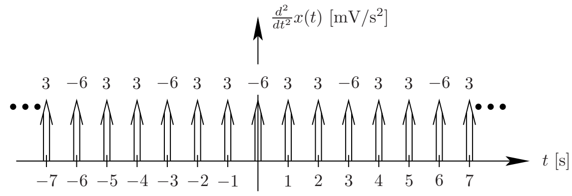
med enhet V/s. Sedan repeteras detta med periodtid $T = 3\,\mathrm{s}$. Se följande graf.




Ytterligare en derivering ger oss

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}x(t) \\ &= 3\cdot 10^{-3}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\big(\delta(t+1-3m) - 2\delta(t-3m) + \delta(t-1-3m)\big) \end{aligned}$$

med enhet V/s$^2$. Se följande graf.




Låt nu $C_n$ för nollskilda heltal $n$ vara de komplexa fourierseriekoefficienten för $\frac{d^2}{dt^2}x(t)$. Då har vi

$$
\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{d^2}{dt^2}x(t)\right)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \\
&= \frac{3\cdot 10^{-3}}{3}\int_{-3/2}^{3/2}\big(\delta(t{+}1)-2\delta(t)+\delta(t{-}1)\big)e^{-j\frac{2\pi}{3}nt}\,dt \\
&= \big(e^{j2\pi n/3}-2+e^{-j2\pi n/3}\big)10^{-3} \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)-1\right)\cdot 10^{-3}\ [\mathrm{V/s^2}] \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)-1\right)\ [\mathrm{mV/s^2}].
\end{aligned}
$$

Deriveringsegenskapen som gavs i uppgiften ger sedan

$$
\begin{aligned}
D_n &= \frac{C_n}{(jn\omega_0)^2} = \frac{2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)-1\right)}{-(2\pi n/3)^2} \\
&= \frac{4.5}{(n\pi)^2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\right)\ [\mathrm{mV}].
\end{aligned}
$$

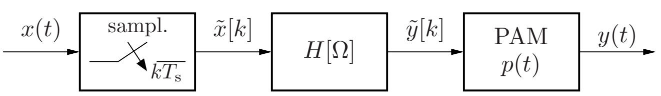
**Svar:**

$$
D_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \frac{4.5}{(n\pi)^2}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)\right), & n \neq 0, \end{cases}
$$

med enhet mV.

**6**

Vi ska analysera följande system:




Filtret är stabilt och har frekvenssvar

$$H[\Omega] = 1-\sqrt{2}\cdot e^{-j\Omega}+e^{-j2\Omega}$$

Sampelfrekvensen är $f_s = 200\,\mathrm{Hz}$.

**a.** Vi ska bestämma utsignalen $y(t)$ för de två insignalerna

$$x(t) = 10\sin(50\pi t+\pi/2) \qquad \text{och}$$
$$x(t) = 10\sin(250\pi t+\pi/4).$$

Beteckningar:

| | |
|---|---|
| $\phi$ : | Fasvridningen hos $x(t)$. |
| $\omega_0$ : | Vinkelfrekvensen hos $x(t)$. |
| $\Omega_0$ : | Motsvarande normerad vinkelfrekvens. |
| $\Omega_0'$ : | Motsvarande normerad vinkelfrekvens nervikt till $\lvert\Omega_0'\rvert \leq \pi$. |
| $\omega_0'$ : | Motsvarande vinkelfrekvens, alltså $\lvert\omega_0'\rvert \leq \pi f_s$. |

Med dessa beteckningar har vi

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}[k] &= 10\sin(\Omega_0 k+\phi) = 10\sin(\Omega_0' k+\phi), \\
\tilde{y}[k] &= 10\left|H\left[e^{j\Omega_0'}\right]\right|\sin\left(\Omega_0' k+\phi+\arg\left\{H\left[e^{j\Omega_0'}\right]\right\}\right), \\
y(t) &= 10\left|H\left[e^{j\Omega_0'}\right]\right|\sin\left(\omega_0' t+\phi+\arg\left\{H\left[e^{j\Omega_0'}\right]\right\}\right),
\end{aligned}
$$

där vi använt oss av sinus-in-sinus-ut-principen som gäller för stabila LTI-system. Vi börjar med fallet $x(t) = 10\sin(50\pi t+\pi/2)$. Då har vi

$$
\begin{aligned}
\phi &= \pi/2, & \omega_0 &= 50\pi\,[\mathrm{s^{-1}}], \\
\Omega_0 &= \Omega_0' = \pi/4, & \omega_0' &= 50\pi\,[\mathrm{s^{-1}}], \\
H\left[e^{j\Omega_0'}\right] &= 0.
\end{aligned}
$$

Alltså har vi utsignalen $y(t) = 0$. Sedan fallet $x(t) = 10\sin(250\pi t+\pi/4)$. Då har vi

$$
\begin{aligned}
\phi &= \pi/4, & \omega_0 &= 250\pi\,[\mathrm{s^{-1}}], \\
\Omega_0 &= 5\pi/4, & \Omega_0' &= \Omega_0-2\pi = -3\pi/4, \\
\omega_0' &= -150\pi\,[\mathrm{s^{-1}}], & H\left[e^{j\Omega_0'}\right] &= \sqrt{8}e^{-j\pi/4}.
\end{aligned}
$$

Alltså har vi utsignalen

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 10\sqrt{8}\sin(-150\pi t) = -10\sqrt{8}\sin(150\pi t) \\
&= 10\sqrt{8}\sin(150\pi t+\pi)
\end{aligned}
$$

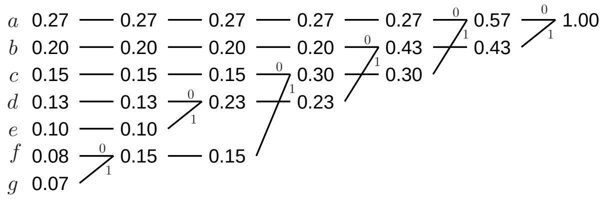
**b.** En fundamental egenskap hos LTI-system är att utsignalen inte kan innehålla frekvenser som inte finns i insignalen. I fallet där insignalen hade vinkelfrekvens $250\pi$, fick utsignalen vinkelfrekvens $150\pi$, vilket inte kan ske om systemet är LTI. Det resulterande systemet är alltså inte LTI.

**Svar:**

**a.** $x(t) = 10\sin(50\pi t+\pi/2)$ ger $y(t) = 0$.
$x(t) = 10\sin(250\pi t+\pi/4)$ ger
$y(t) = 10\sqrt{8}\sin(150\pi t+\pi)$.

**b.** Systemet är inte LTI.

**7**
Vi skapar ett träd med den förenklade huffmanalgoritmen:




Därför får vi följande trädkod.

| Symbol | Kodord | $l_i$ | $\Pr\{a_i\}$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | 00 | 2 | 0.27 |
| $b$ | 10 | 2 | 0.20 |
| $c$ | 010 | 3 | 0.15 |
| $d$ | 110 | 3 | 0.13 |
| $e$ | 111 | 3 | 0.10 |
| $f$ | 0110 | 4 | 0.08 |
| $g$ | 0111 | 4 | 0.07 |

Den förväntade kodordslängden ges av

$$\begin{aligned}\bar{l} &= 0.27 \cdot 2 + 0.20 \cdot 2 + 0.15 \cdot 3 + 0.13 \cdot 3 \\ &+ 0.10 \cdot 3 + 0.08 \cdot 4 + 0.07 \cdot 4 \\ &= 2.68 \text{ bit/symbol.}\end{aligned}$$

Slutligen ges redundansen av

$$\bar{l} + \sum_i \Pr\{a_i\} \log_2(\Pr\{a_i\}) = 0.0201$$

**Svar:** Huffmankoden som ovan. Den förväntade kodordslängden är 2.68 och redundansen är 0.02.

**8**
**Svar:**

**a.** Längd: Antalet bitar i ett kodord. Betecknas vanligen $n$.
**b.** Storlek: Antalet kodord i koden. Betecknas vanligen $M$.
**c.** Takt: $R = \log_2(M)/n$.
**d.** Minavstånd: Minsta hammingavståndet mellan två olika kodord i koden, där med hammingavstånd menas antalet bitpositioner där de två kodorden är olika.