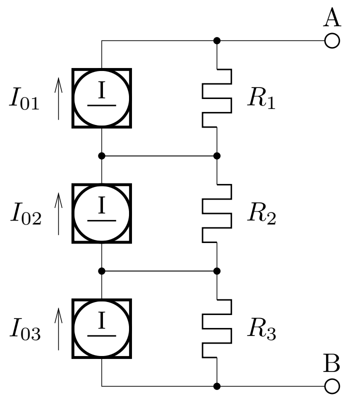
# Lösningsförslag till tentamen i TSDT49 Elektriska kretsar för I & Ii

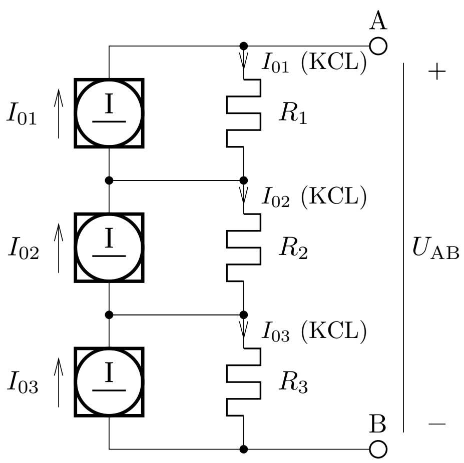
Mikael Olofsson, email: mikael@isy.liu.se

Tentamensdatum 2006-01-12

**1**
Vi var givna följande tvåpol.



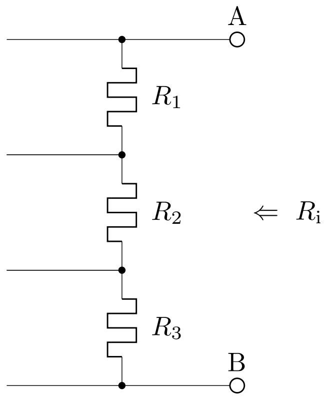

**a.** Vi ska bestämma en ekvivalent tvåpol med hjälp av tvåpolssatsen. Då behöver vi först tomgångsspänningen $U_{\mathrm{AB}}$ i figuren nedan.




Vi noterar att KCL ger strömmarna $I_{01}$, $I_{02}$ och $I_{03}$ genom resistanserna $R_1$, $R_2$ respektive $R_3$, så som visas i figuren. Vi bestämmer tomgångsspänningen med KVL:

$$U_{\mathrm{AB}} = I_{01}R_1 + I_{02}R_2 + I_{03}R_3.$$

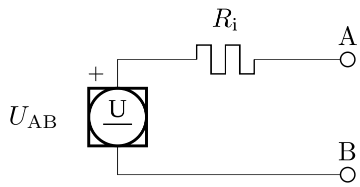
Nästa steg är att bestämma den inre resistansen. Det gör vi genom att nollställa källorna. Då det är strömkällor ersätts de därför med avbrott. Vi får då följande figur.



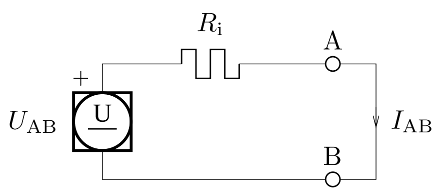

Den inre resistansen $R_{\mathrm{i}}$ är ersättningresistansen för detta passiva nät. Vi får därför

$$R_{\mathrm{i}} = R_1 + R_2 + R_3.$$

Slutligen får vi följande ekvivalenta tvåpol.



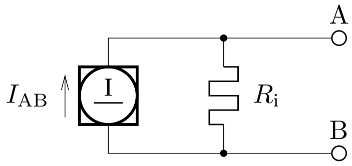

**b.** Vi ska bestämma en ekvivalent tvåpol med hjälp av Nortons teorem. Detta kan göras utgående från ursprungsfiguren, men vi utgår istället från den ekvivalenta kretsen som blev resultatet av deluppgift a. Då behöver vi kortslutningsströmmen $I_{\mathrm{AB}}$ i figuren nedan.



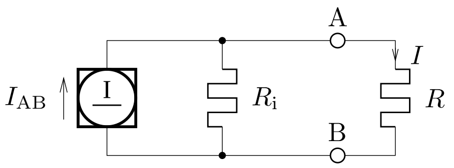
Ohms lag ger då

$$I_{\mathrm{AB}} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{R_{\mathrm{i}}} = \frac{I_{01}R_1 + I_{02}R_2 + I_{03}R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Den inre resistansen är fortfarande $R_{\mathrm{i}}$, och vi får följande ekvivalenta tvåpol.




**c.** Kretsen belastas med resistansen $R$. Vi använder den ekvivalenta kretsen från deluppgift b. Då har vi följande figur, där $I$ betecknar strömmen som vi söker.




Strömdelning ger då

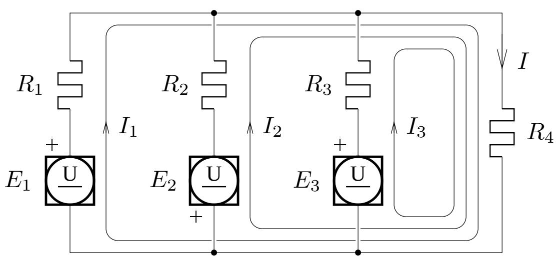
$$I = \frac{R_{\mathrm{i}}}{R_{\mathrm{i}} + R} I_{\mathrm{AB}} = \frac{I_{01}R_1 + I_{02}R_2 + I_{03}R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R}.$$

**2**

Givna värden:

$$R_1 = 1\ \mathrm{k}\Omega, \qquad E_1 = 1\ \mathrm{V},$$
$$R_2 = 2\ \mathrm{k}\Omega, \qquad E_2 = 2\ \mathrm{V},$$
$$R_3 = 3\ \mathrm{k}\Omega, \qquad E_3 = 3\ \mathrm{V},$$
$$R_4 = 4\ \mathrm{k}\Omega,$$

**a.** Vi inför cirkulerande strömmar i oberoende slingor.




Vi tecknar KVL i varje slinga:

$$\begin{aligned}
E_1 - R_1 I_1 - R_4(I_1 + I_2 + I_3) &= 0,\\
-E_2 - R_2 I_2 - R_4(I_1 + I_2 + I_3) &= 0,\\
E_3 - R_3 I_3 - R_4(I_1 + I_2 + I_3) &= 0.
\end{aligned}$$

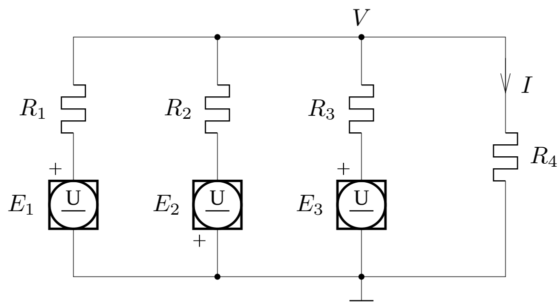
Vi löser ekvationssystemet, och får med insatta värden

$$\begin{aligned}
I_1 &= 0.52\ \mathrm{mA},\\
I_2 &= -1.24\ \mathrm{mA},\\
I_3 &= 0.84\ \mathrm{mA}.
\end{aligned}$$

Den sökta strömmen fås slutligen som

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0.12\ \mathrm{mA}$$

**b.** Vi jordar en punkt och inför potentialen $V$ i den enda ojordade noden.




Vi tecknar KCL i den ojordade noden:

$$\frac{E_1 - V}{R_1} + \frac{-E_2 - V}{R_2} + \frac{E_3 - V}{R_3} + \frac{0 - V}{R_4} = 0.$$

Vi löser ekvationen, och får

$$V = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = 0.48\ \mathrm{V}$$

Ohms lag i $R_4$ ger oss den sökta strömmen

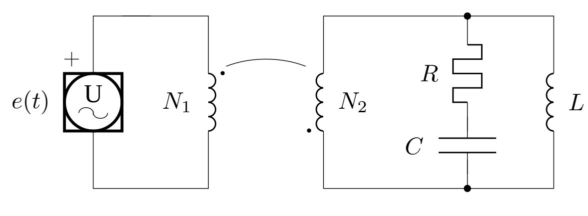
$$I = \frac{V - 0}{R_4} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{R_4}{R_1} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3} + 1},$$

vilket med insatta värden ger oss

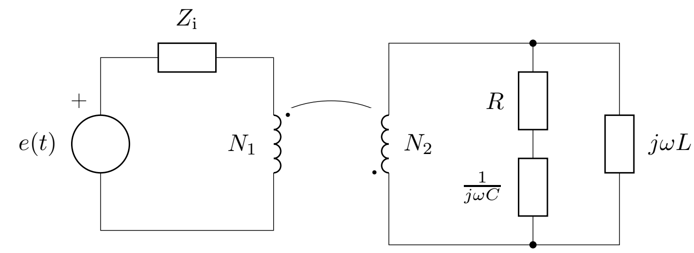
$$I = 0.12\ \mathrm{mA}$$

**3**

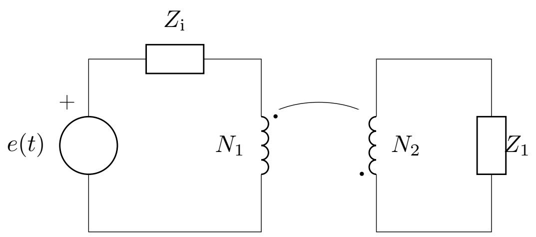
Given figur:



Vidare givet $e(t) = 10\sin(10^3 t)$ V, $R = 1\ \Omega$, $L = 1$ mH och $C = 1$ mF samt att spänningskällan har en inre impedans med absolutbeloppet $10\ \Omega$ och argumentet $\pi/2$. Komplexschema med alla ingående komponenter, inklusive den inre impedansen $Z_\mathrm{i}$:




Vi ersätter transformatorns belastning med impedansen $Z_1$ och får den enklare figuren:



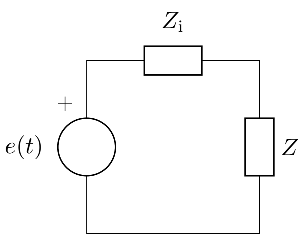

Här får vi då

$$Z_1 = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) // j\omega L = \frac{(1 + j\omega RC)\cdot j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} = 1 + j$$

Vi kommer så småningom att använda oss av beloppet av denna impedans, dvs.

$$|Z_1| = \sqrt{2}.$$

Med hjälp av impedanstransformering kan vi rita om figuren så:




Här har vi då

$$Z = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_1$$

Belastningen $Z$ är därmed variabel endast i sitt belopp och inte i sitt argument, och vi har det fjärde fallet enligt formelbladet, dvs. vi maximerar effektutveckligngen i belastningen då vi har

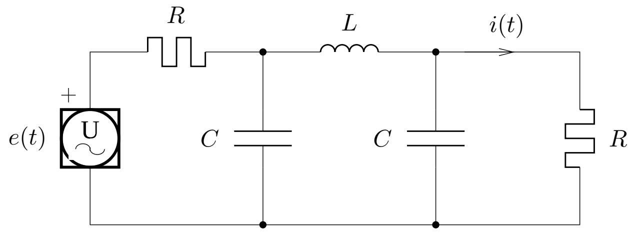
$$|Z| = |Z_\mathrm{i}|.$$

Genom att kombinera dessa två sista ekvationer, så får vi

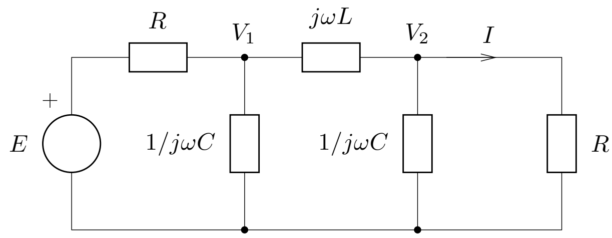
$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{|Z_\mathrm{i}|}{|Z_1|}} = \sqrt{5\sqrt{2}}.$$

**4**

Vi var given följande figur.




Givna värden: $e(t) = 10\sin(10^3 t + \frac{\pi}{2})$ V, $R = 1\ \Omega$, $L = 1$ mH och $C = 1$ mF. Vi börjar med att rita motsvarande komplex-schema:




Här har vi $E = 10e^{j\pi/2} = j10$ V, $\omega = 10^3$, och den sökta strömmen motsvaras av $I$. Vi avser att lösa uppgiften med nodanalys, varför vi har jordat en nod i komplexschemat och infört nodpotentialerna $V_1$ och $V_2$.

KCL i de två noderna ger

$$\frac{E - V_1}{R} + \frac{0 - V_1}{1/j\omega C} + \frac{V_2 - V_1}{j\omega L} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{V_1 - V_2}{j\omega L} + \frac{0 - V_2}{1/j\omega C} + \frac{0 - V_2}{R} = 0. \quad (2)$$

Ur ekvation 2 löser vi ut

$$V_1 = \left(1 - \omega^2 LC + \frac{j\omega L}{R}\right) V_2 = jV_2,$$

med insatta värden. Detta sätter vi sedan in i ekvation 1, vilket ger oss

$$E - j2V_2 = 0$$

med insatta värden för $\omega$, $R$, $L$ och $C$. Detta skriver vi om som

$$V_2 = \frac{E}{j2} = \frac{j10}{j2} = 5 \text{ V}.$$

Den sökta strömmens komplexa representation, $I$, får vi med Ohms lag i den högra resistansen $R$:

$$I = \frac{V_2 - 0}{R} = 5 \text{ A}.$$

Slutligen överför vi detta till tidsdomänen på formen $i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \phi)$. Först amplituden:

$$\hat{I} = |I| = |5| = 5 \text{ A}$$

Sedan fasvridningen:

$$\phi = \arg\{I\} = \arg\{5\} = 0$$

Alltså, slutligen:

$$i(t) = 5 \cdot \sin\left(10^3 t\right) \text{ A}.$$