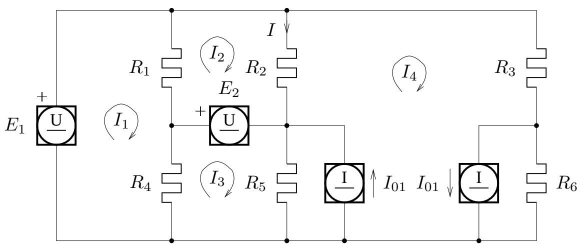
Lösningsförslag till tentamen i TSDT49 Elektriska kretsar för I & Ii

Tentamensdatum 2007-05-31

1
Strömkällan I_{02} är kortsluten, och kan därför tas bort.

a. Strömkällan I_{01} är ensam i sin gren, och elimineras över R_5 och R_6. Vi får därmed följande figur med införda cirkulerande strömmar I_1, I_2, I_3 och I_4.



Vi tecknar KVL i varje slinga:

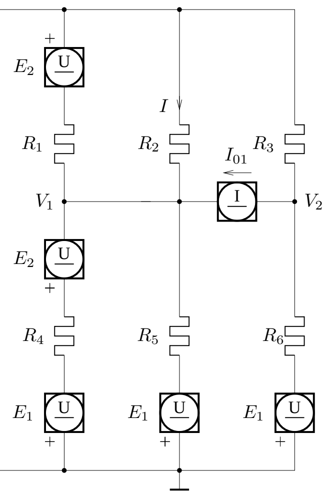
$$\begin{aligned}
E_1 - R_1(I_1 - I_2) - R_4(I_1 - I_3) &= 0,\\
-R_1(I_2 - I_1) - R_2(I_2 - I_4) + E_2 &= 0,\\
-R_4(I_3 - I_1) - E_2 - R_5(I_3 + I_{01} - I_4) &= 0,\\
-R_5(I_4 - I_3 - I_{01}) - R_2(I_4 - I_2) - R_3 I_4 - R_6(I_4 - I_{01}) &= 0.
\end{aligned}$$

Vidare fås den sökta strömmen I ur de cirkulerande strömmarna med sambandet

$$I = I_2 - I_4$$

Dessa fem ekvationer ger lösningen.

b. De två spänningskällorna är ensamma i sina grenar, och elimineras därför. E_1 elimineras genom att den skjuts neråt i figuren, medan E_2 elimineras genom att skjutas åt vänster. Vi får då följande figur med införda nodpotentialer V_1 och V_2, efter att vi jordat den nedersta punkten.



Vi tecknar KCL i varje ojordad nod:

$$\begin{aligned}
\frac{-E_2 - V_1}{R_1} + \frac{-V_1}{R_2} + I_{01} + \frac{-E_1 - E_2 - V_1}{R_4} + \frac{-E_1 - V_1}{R_5} &= 0,\\
\frac{-V_2}{R_3} - I_{01} + \frac{-E_1 - V_2}{R_6} &= 0.
\end{aligned}$$

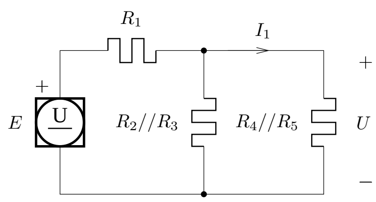
Vidare fås den sökta strömmen I ur nodpotentialerna med sambandet

$$I = \frac{-V_1}{R_2}$$

Dessa tre ekvationer ger lösningen.

2
Enligt uppgiftsformuleringen ska vi lösa uppgiften med hjälp av superposition.

Först betraktar vi spänningskällan och nollställer strömkällan. Då får vi följande krets, där vi infört spänningen U.



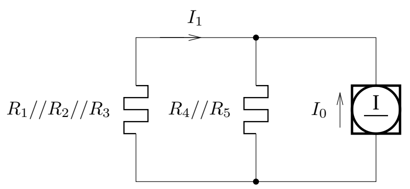
Spänningsdelning ger

$$U = \frac{R_2//R_3//R_4//R_5}{R_1 + R_2//R_3//R_4//R_5} E = \frac{12}{7} \text{ V}$$

Ohms lag ger sedan

$$I_1 = \frac{U}{R_4//R_5} E = \frac{18}{7} \text{ mA}$$

Först betraktar vi strömkällan och nollställer spänningskällan. Då får vi följande krets.



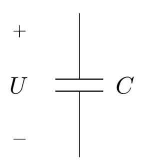
Strömdelning ger

$$I_2 = -\frac{R_4//R_5}{R_1//R_2//R_3 + R_4//R_5} I_0 = -\frac{16}{7} \text{ mA}$$

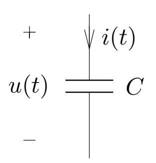
Den sökta strömmen fås sedan med superpositionsprincipen som

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2}{7} \text{ mA}$$

3
Vi ska visa att kapacitansen C i figuren nedan lagrar energin $W = CU^2/2$.



Vi följer tipset och skapar en ström $i(t)$ i figuren nedan så att om spänningen $u(t)$ är 0 när vi startar, så är den U när vi slutar.



Det kan vi åstadkomma genom att låta $i(t)$ ges av

$$i(t) = \begin{cases} I, & 0 \le t < T, \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases}$$

för några lämpligt valda I och T. För C gäller

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u(t).$$

Med andra ord är $u(t)$ en ramp

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{I}{C} \cdot t, & 0 \le t < T, \\ \frac{I}{C} \cdot T, & t \ge T. \end{cases}$$

Ur det önskade sambandet $u(T) = U$ kan vi bestämma I som

$$I = \frac{CU}{T}.$$

Den momentatna effekten, $p(t)$, ges av

$$p(t) = u(t)i(t) = \begin{cases} \frac{CU^2}{T^2} t, & 0 \le t < T, \\ 0, & \text{för övrigt,} \end{cases}$$

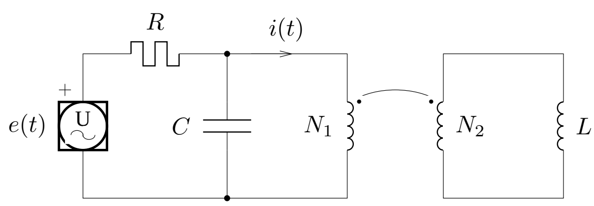
och den energi som vi tillfört C blir då

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{\infty} p(t)\, dt = \int_0^T \frac{CU^2}{T^2} t\, dt \\ &= \frac{CU^2}{T^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{CU^2}{T^2} \frac{T^2}{2} = \frac{CU^2}{2}, \end{aligned}$$

vilket var vad vi ville visa.

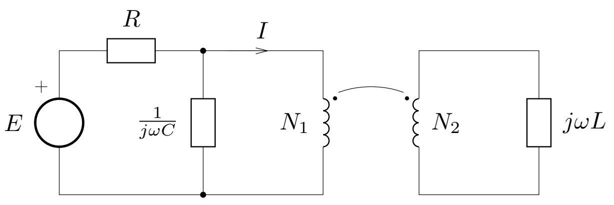
Alternativt angreppssätt:
Börja med kapacitansen uppladdad till spänningen U. Låt den sedan laddas ur via en resistans, vilket är ett exponentialförlopp som tar oändlig tid. Energin som var lagrad i kapacitansen är då integralen av den momentana effektutvecklingen i sagda resistans.

4
Vi söker strömmen $i(t)$ i följande figur.



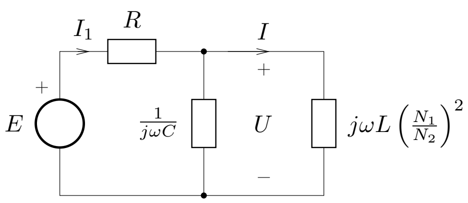
Givna komponentvärden: $e(t) = 6 \cdot \sin(10^3 t)$ V, $R = 1\ \Omega$, $L = 250\ \mu$H, $C = 1$ mF, $N_1 = 200$ varv, och $N_2 = 100$ varv. Uppenbart har vi vinkelfrekvensen $\omega = 10^3$ rad/s.

Vi börjar med att överföra kretsen på komplex form enligt $j\omega$-metoden.



Här har vi komponentvärdena $E = 6$ V, $j\omega L = j/4\ \Omega$, $1/j\omega C = -j\ \Omega$.

Med impedanstransformering får vi sedan följande figur, där vi också infört strömmen I_1 och spänningen U.



Här har vi impedansen $j\omega L \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = j\ \Omega$. Vi noterar att ersättningsimpedansen för parallellkopplingen ges av

$$\frac{1}{j\omega C} // j\omega L \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = (-j)//j = \frac{-j^2}{j-j} = \infty.$$

Därmed får vi strömmen $I_1 = 0$, och spänningen $U = E$. Den komplexa representationen I av den sökta strömmen ges då som

$$I = \frac{U}{j\omega L (N_1/N_2)^2} = \frac{6}{j} \text{ A} = -j6 \text{ A}.$$

Den sökta strömmen $i(t)$ ges slutligen av

$$\begin{aligned} |I| &= 6 \text{ A}, \\ \arg I &= -\pi/2 \text{ rad}, \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} i(t) &= |I| \sin(\omega t + \arg I) \\ &= 6 \sin(\omega t - \pi/2) \text{ A} \end{aligned}$$