# TSDT15 Signaler & system, del 2

## Lösningar till tentan 2014-08-19

Mikael Olofsson, mikael@isy.liu.se

**1**
Vi var givna ett tidsdiskret LTI-system med impulssvar

$$h[n] = 2^{-n}u[3+n] + 3^n u[3-n].$$

Alla beräkningar skulle ske i tidsdomänen.

**a.** Ett tidsdiskret LTI-system är stabilt om dess impulssvar är absolutsummerbart. Betrakta alltså

$$\begin{aligned}\sum_n \big|h[n]\big| &= \sum_n \big(2^{-n}u[3+n] + 3^n u[3-n]\big)\\ &= \sum_{n=-3}^{\infty} 2^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{3} 3^n\\ &= \frac{8}{1-2^{-1}} + \frac{27}{1-3^{-1}}\\ &= 16 + \frac{81}{2} = 56.5,\end{aligned}$$

vilket är ändligt. Alltså är systemet stabilt.

**b.** Systemet är inte kausalt. Impulssvaret är nollskilt för negativa $n$. Närmare bestämt är systemet allmänt icke-kausalt då impulssvaret är nollskilt för både positiva och negativa $n$.

**c.** Vi var givna insignalen

$$x[n] = u[n] - u[n-5],$$

Eftersom systemet är stabilt och insignalen ändlig, så ges utsignalen av

$$\begin{aligned}y[n] = (x*h)[n] &= \sum_k h[k]x[n-k]\\ &= \sum_k h[k]\big(u[n-k] - u[n-k-5]\big).\end{aligned}$$

för alla $n$. Här noterar vi att vi har

$$u[n-k] - u[n-k-5] = \begin{cases}1, & n-4 \le k \le n,\\ 0, & \text{för övrigt.}\end{cases}$$

Alltså har vi

$$y[n] = \sum_{k=n-4}^{n} h[k]$$

Definiera nu

$$\begin{aligned}h_1[n] &= 2^{-n}u[3+n], & h_2[n] &= 3^n u[3-n],\\ y_1[n] &= (x*h_1)[n], & y_2[n] &= (x*h_2)[n].\end{aligned}$$

Vi noterar att vi har $y[n] = y_1[n] + y_2[n]$.
Först studerar vi $y_1[n]$. Vi har

$$y_1[n] = \sum_{k=n-4}^{n} h_1[k] = \sum_{k=n-4}^{n} 2^{-k}u[3+k]$$

Vi har tre fall. För $n < -3$ summerar vi fem nollor, och resultatet blir noll. För $-3 \le n < 0$ har vi

$$y_1[n] = \sum_{k=-3}^{n} 2^{-k} = \frac{2^3 - 2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} = 16(1-2^{-n-4})$$

För $n \ge 0$ har vi

$$y_1[n] = \sum_{k=n-4}^{n} 2^{-k} = \frac{2^{-(n-4)} - 2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} = 31\cdot 2^{-n}$$

Sedan studerar vi $y_2[n]$. Vi har

$$y_2[n] = \sum_{k=n-4}^{n} h_2[k] = \sum_{k=n-4}^{n} 3^k u[3-k]$$

Vi har tre fall. För $n \le 3$ har vi

$$y_1[n] = \sum_{k=n-4}^{n} 3^k = \frac{3^{n-4} - 3^{n+1}}{1-3} = 121\cdot 3^{n-4}$$

För $3 \le n \le 7$ har vi

$$y_2[n] = \sum_{k=n-4}^{3} 3^k = \frac{3^{n-4} - 3^4}{1-3} = \frac{81}{2}(1-3^{n-8})$$

För $n > 7$ summerar vi fem nollor, och resultatet blir noll.

Sammantaget har vi alltså

$$y_1[n] = \begin{cases} 0, & n < -3, \\ 16(1-2^{-n-4}), & -3 \leq n < 0, \\ 31 \cdot 2^{-n}, & n \geq 0, \end{cases}$$

$$y_2[n] = \begin{cases} 121 \cdot 3^{n-4}, & n \leq 3, \\ \frac{81}{2}(1-3^{n-8}), & 3 \leq n \leq 7, \\ 0, & n > 7. \end{cases}$$

Och slutligen har vi utsignalen

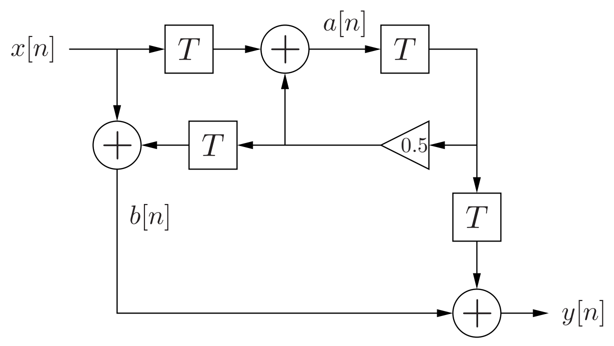
$$\begin{aligned} y[n] &= y_1[n] + y_2[n] \\ &= \begin{cases} 121 \cdot 3^{n-4}, & n < -3, \\ 16(1-2^{-n-4}) + 121 \cdot 3^{n-4}, & -3 \leq n < 0, \\ 31 \cdot 2^{-n} + 121 \cdot 3^{n-4}, & 0 \leq n < 3, \\ 31 \cdot 2^{-n} + \frac{81}{2}(1-3^{n-8}), & 3 \leq n \leq 7, \\ 31 \cdot 2^{-n}, & n > 7. \end{cases} \end{aligned}$$

**Svar:**

**a**. Systemet är stabilt.
**b**. Systemet är inte kausalt.
**c**. $y[n] = \begin{cases} 121 \cdot 3^{n-4}, & n < -3, \\ 16(1-2^{-n-4}) + 121 \cdot 3^{n-4}, & -3 \leq n < 0, \\ 31 \cdot 2^{-n} + 121 \cdot 3^{n-4}, & 0 \leq n < 3, \\ 31 \cdot 2^{-n} + \frac{81}{2}(1-3^{n-8}), & 3 \leq n \leq 7, \\ 31 \cdot 2^{-n}, & n > 7. \end{cases}$

**2**

Vi är givna följande system, där vi infört namn på alla utsignaler från adderarna.




**a**. Från figuren ser vi att vi har

$$\begin{aligned} a[n] &= x[n-1] + 0.5a[n-1], \\ b[n] &= x[n] + 0.5a[n-2], \\ y[n] &= b[n] + a[n-2]. \end{aligned}$$

Vi $z$-transformerar ekvationerna och får då

$$A[z] = z^{-1}X[z] + 0.5z^{-1}A[z], \quad (1)$$
$$B[z] = X[z] + 0.5z^{-2}A[z], \quad (2)$$
$$Y[z] = B[z] + z^{-2}A[z]. \quad (3)$$

Ur ekvation 1 får vi

$$A[z] = \frac{z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}X[z] = \frac{1}{z-0.5}X[z], \quad (4)$$

och ekvation 2 insatt i ekvation 3 ger oss

$$Y[z] = X[z] + 1.5z^{-2}A[z]. \quad (5)$$

Slutligen sätter vi in ekvation 4 i ekvation 5, vilket ger oss

$$\begin{aligned} Y[z] &= X[z] + \frac{1.5z^{-2}}{z-0.5}X[z] \quad (6) \\ &= \frac{z^3 - 0.5z^2 + 1.5}{z^2(z-0.5)}X[z]. \quad (7) \end{aligned}$$

Ur detta finner vi att vi har systemfunktionen

$$H[z] = \frac{z^3 - 0.5z^2 + 1.5}{z^2(z-0.5)}. \quad (8)$$

Då systemet består uteslutande av kausala komponenter, så är hela systemet kausalt. Alltså ges konvergensområdet av den pol som har störst belopp, och alltså har systemfunktionen konvergensområdet $|z| > 0.5$.

**b**. Vi börjar med att skriva om ekvation 7, och får då

$$Y[z] = \frac{1 - 0.5z^{-1} + 1.5z^{-3}}{1-0.5z^{-1}}X[z], \quad (9)$$

vilket ger oss

$$(1-0.5z^{-1})Y[z] = (1 - 0.5z^{-1} + 1.5z^{-3})X[z]. \quad (10)$$

Detta inverstransformerar vi och får då differensekvationen

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] - 0.5x[n-1] + 1.5x[n-3]. \quad (11)$$

**c**. Vi vill bestämma impulssvaret $h[n]$ genom att inverstransformera systemfunktionen. Vi börjar med att skriva om systemfunktionen i ekvation 8 som

$$H[z] = 1 + 1.5z^{-3}\frac{z}{z-0.5}. \quad (12)$$

Inverstransformen av detta ger oss impulssvaret

$$h[n] = \delta[n] + 1.5 \cdot 0.5^{n-3}u[n-3]. \quad (13)$$

Här har vi använt tabell 25.1, 24.2 och 25.7 i F&T.

**Svar:**

**a.** $H[z] = \frac{z^3-0.5z^2+1.5}{z^2(z-0.5)}$
Konvergensområde: $|z| > 0.5$

**b.** $y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] - 0.5x[n-1] + 1.5x[n-3]$

**c.** $h[n] = \delta[n] + 1.5 \cdot 0.5^{n-3}u[n-3]$

**3**

Vi är givna en tidskontinuerlig signal

$$x(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{4f_s}{3}t\right)$$

som samplas med samplingsfrekvens $f_s$ och sedan omedelbart rekonstrueras idealt. Vidare skulle $y[n]$ beteckna den samplade signalen och $z(t)$ utsignalen. Slutligen skulle $w(t) = z(t) - x(t)$ beteckna felet.

**a.** Vi ska rita spektrum för alla ingående signaler. Enligt tabell 17.8 i F&T, sidan 50, så är insignalens spektrum

$$X(\omega) = \begin{cases} \frac{3}{4f_s}, & |\omega| \leq \pi\frac{4f_s}{3}, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

Enligt F&T, sidan 13, så ges den den samplade insignalens spektrum av Poissons summationsformel enligt

$$\begin{aligned} Y[\Omega] &= \frac{1}{T}\sum_k X\left(\frac{\Omega - 2\pi k}{T}\right) \\ &= \begin{cases} \frac{3}{4}, & |\Omega| \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{3}{2}, & \frac{2\pi}{3} < |\Omega| \leq \pi, \end{cases} \end{aligned}$$

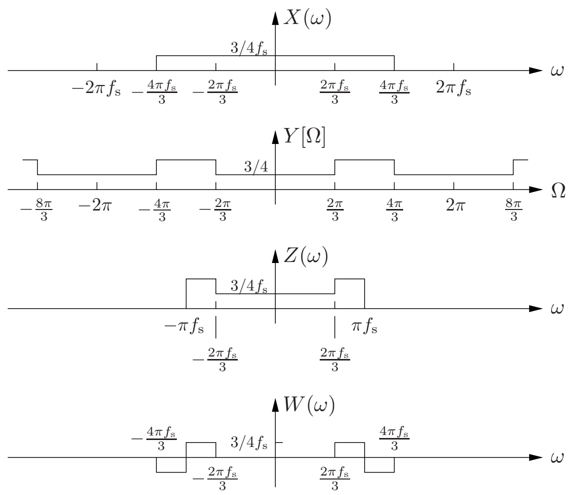
vilket upprepas med period $2\pi$. Den idealt rekonstruerade signalens spektrum ges enligt F&T, sidan 13, av

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \begin{cases} TY[\omega T], & |\omega| \leq \pi f_s, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{4f_s}, & |\omega| \leq \pi\frac{2f_s}{3}, \\ \frac{3}{2f_s}, & \pi\frac{2f_s}{3} < |\omega| \leq \pi f_s, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases} \end{aligned}$$

Slutligen, eftersom felet ges av $w[n] = z[n] - x[n]$, så ges felets spektrum av

$$\begin{aligned} W(\omega) &= Z(\omega) - X(\omega) \\ &= \begin{cases} \frac{3}{4f_s}, & \pi\frac{2f_s}{3} < |\omega| \leq \pi f_s, \\ -\frac{3}{4f_s}, & \pi f_s < |\omega| \leq \pi\frac{4f_s}{3}, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases} \end{aligned}$$

Grafiskt blir detta så här:




**b.** Här söker vi tidsuttrycken för alla ingående signaler. Först får vi den samplade signalen direkt som

$$y[n] = x(nT) = \operatorname{sinc}\left(\frac{4f_s}{3}nT\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{4n}{3}\right)$$

Den rekonstruerade signalen får vi som inverstransformen till dess spektrum som

$$z(t) = \frac{3}{2}\operatorname{sinc}\left(f_s t\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{2f_s}{3}t\right)$$

enligt F&T, tabell 17.8 igen. Felet $w(t)$ får vi direkt ur

$$\begin{aligned} w(t) &= z(t) - x(t) \\ &= \frac{3}{2}\operatorname{sinc}\left(f_s t\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{2f_s}{3}t\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{4f_s}{3}t\right). \end{aligned}$$

**Svar:**

**a.** Se graferna ovan.

**b.**

$$\begin{aligned} y[n] &= \operatorname{sinc}\left(\frac{4n}{3}\right) \\ z(t) &= \frac{3}{2}\operatorname{sinc}\left(f_s t\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{2f_s}{3}t\right) \\ w(t) &= \frac{3}{2}\operatorname{sinc}\left(f_s t\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{2f_s}{3}t\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{4f_s}{3}t\right) \end{aligned}$$

**4**

Vi ska syntetisera ett tidsdiskret LP-filter. Med gängse beteckningar har vi normerade 3 dB-gränsfrekvensen

$$\theta_p = 0.05,$$

samt normerade spärrbandsgränsfrekvensen

$$\theta_\mathrm{s} = 0.3.$$

Motsvarande normerade vinkelfrekvenser är då

$$\Omega_\mathrm{p} = 2\pi\theta_\mathrm{p} = 0.1\pi, \qquad \Omega_\mathrm{s} = 2\pi\theta_\mathrm{s} = 0.6\pi.$$

Sedan har vi maximala dämpningen i passbandet $A_\mathrm{p} = 3\,\mathrm{dB}$ och minsta tillåtna dämpning i spärrbandet $A_\mathrm{s} = 30\,\mathrm{dB}$.

**Krav TD-LP → TK-LP**

För enkelhets skull väljer vi gränsvinkelfrekvensen $\omega_\mathrm{p} = 1$ för det tidskontinuerliga referensfiltret. Då har vi enligt F&T, sidan 27, sambandet

$$\gamma \tan(\Omega_\mathrm{p}/2) = 1,$$

vilket vi skriver om som

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\tan(\Omega_\mathrm{p}/2)}\\ &= \frac{1}{\tan(0.05\pi)} \approx 6.3137.\end{aligned}$$

Vidare får vi spärrbandsgränsen

$$\begin{aligned}\omega_\mathrm{s} &= \gamma \cdot \tan(\Omega_\mathrm{s}/2)\\ &= \frac{\tan(\Omega_\mathrm{s}/2)}{\tan(\Omega_\mathrm{p}/2)}\\ &= \frac{\tan(0.3\pi)}{\tan(0.05\pi)} \approx 8.6901.\end{aligned}$$

**Syntetisera TK-LP**

Nu är det dags att syntetisera vårt referensfilter. För gradtalet $n$ ska följande gälla enligt F&T, sidan 24:

$$n \geq \frac{\log_{10}\left(\frac{10^{0.1A_\mathrm{s}}-1}{10^{0.1A_\mathrm{p}}-1}\right)}{2\log_{10}\left(\frac{\omega_\mathrm{s}}{\omega_\mathrm{p}}\right)} \approx 1.60.$$

Minsta värde som uppfyller det är då $n = 2$. Ett LP-filter av butterworth-typ med gradtal 2 och gränsvinkelfrekvens $1\,\mathrm{rad/s}$ har poler i $\frac{-1\pm j}{\sqrt{2}}$, inga nollställen och nivåkonstant 1. Systemfunktionen för LP-filtret blir då

$$H_\mathrm{LP}(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1},$$

enligt tabell 4 på sidan 22 i F&T.

**Filtertransformation TK-LP → TD-LP**

Slutligen använder vi bilinjär transformation enligt F&T, sidan 27:

$$\begin{aligned}H[z] = H_\mathrm{LP}\left(\gamma\frac{z-1}{z+1}\right) &= \frac{1}{\left(\gamma\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \sqrt{2}\gamma\frac{z-1}{z+1} + 1}\\ &= \frac{(z+1)^2}{\gamma^2(z-1)^2 + \sqrt{2}\gamma(z-1)(z+1) + (z+1)^2}\\ &= \frac{z^2+2z+1}{\gamma^2(z^2-2z+1)^2 + \sqrt{2}\gamma(z^2-1) + (z^2+2z+1)^2}\\ &= \frac{z^2+2z+1}{(\gamma^2+\sqrt{2}\gamma+1)z^2 + 2(1-\gamma^2)z + \gamma^2-\sqrt{2}\gamma+1}\\ &\approx 2.008\cdot 10^{-2} \cdot \frac{z^2+2z+1}{z^2-1.561z+0.6414}\end{aligned}$$

**Svar:** $H[z] \approx 2.008 \cdot 10^{-2} \cdot \dfrac{z^2+2z+1}{z^2-1.561z+0.6414}$

**5**

Vi har systemfunktionen

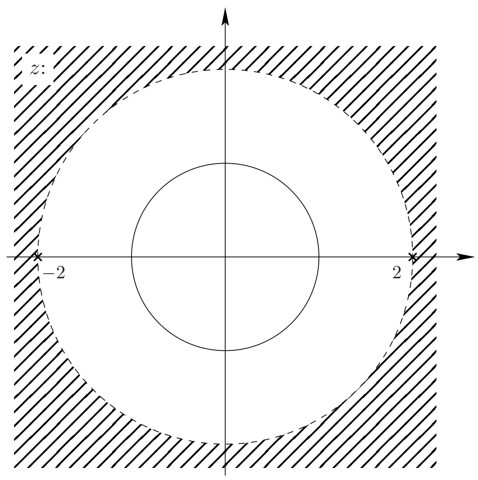
$$H_1[z] = \frac{1}{z^2-4},$$

som enligt uppgiftsformuleringen ska motsvara ett instabilt system.

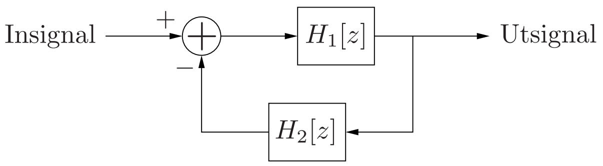
**a.** Vi skriver om systemfunktionen:

$$H_1[z] = \frac{1}{z^2-4} = \frac{1}{(z-2)(z+2)},$$

vilket motsvarar ett instabilt system om det har konvergensområde $|z| > 2$, ty då ingår inte enhetscirkeln i konvergensområdet. Vi noterar att det innebär att systemet är kausalt. Vi har då följande pol-nollställe-diagram:



**b.** Vi återkopplar systemet $H_1[z]$ med återkopplingssystemet $H_2[z]$ på vanligt sätt:




Låt $T_2[z]$ och $N_2[z]$ beteckna täljar- respektive nämnarpolynomet i $H_2[z]$, dvs. vi har

$$H_2[z] = \frac{T_2[z]}{N_2[z]}.$$

Det totala systemets systemfunktion är

$$H[z] = \frac{H_1[z]}{1 + H_1[z]H_2[z]},$$

och kommer man inte ihåg det, så får man härleda det. Insatt våra system, så har vi

$$H[z] = \frac{\frac{1}{z^2-4}}{1 + \frac{1}{z^2-4} \cdot \frac{T_2[z]}{N_2[z]}} = \frac{N_2[z]}{(z^2-4)N_2[z] + T_2[z]}$$

Återkopplingssystemet ska enligt uppgiftsformuleringen ha så lågt gradtal som möjligt. Vi börjar därför med att prova med ett system av ordning noll. Då har vi

$$T_2[z] = K, \qquad N_2[z] = 1, \qquad H_2[z] = K,$$

där $K$ är någon reell konstant som vi vill bestämma. Alla poler ska vara i origo. Betrakta nämnaren, insatt våra $T_2[z]$ och $N_2[z]$, som då är

$$(z^2-4)1 + K = z^2 + K - 4.$$

Om alla polerna ska vara i origo, så ska konstanttermen i uttrycket ovan vara noll, dvs. vi har

$$K - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad K = 4.$$

Vi verifierar att det resulterande systemet är stabilt och har alla poler i origo, genom att sätta in $H_2[z] = 4$ i uttrycket för $H[z]$, och får då

$$H[z] = \frac{1}{z^2}.$$

Eftersom alla delsystem är kausala, så är även det totala systemet kausalt. Vårt svar är slutligen att återkopplingssystemet ska vara

$$H_2[z] = 4.$$

**c.** Låt $H'[\Omega]$ beteckna systemets frekvenssvar. Då har vi

$$H'[\Omega] = H[e^{j\Omega}] = e^{-j2\Omega}.$$

Då har vi amplitudkarakteristiken

$$\left|H'[\Omega]\right| = |e^{j2\Omega}| = 1$$

Systemet är uppenbart ett allpassfilter.

**Svar:**

**a.** Se PN-diagram ovan.
**b.** $H_2[z] = 4$.
**c.** Ett allpassfilter.