TSDT15 Signaler & system, del 2

Lösningar till tentan 2013-08-27

Mikael Olofsson, mikael@isy.liu.se

1

a. Systemet har poler i $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm j)$ och ett dubbelt nollställe i -1, samt nivåkonstanten 1. Alltså har vi systemfunktionen

$$H[z] = \frac{(z+1)^2}{\left(z+\frac{1+j}{2}\right)\left(z+\frac{1-j}{2}\right)\left(z-\frac{1+j}{2}\right)\left(z-\frac{1-j}{2}\right)} = \frac{(z+1)^2}{\left(z^2+z+\frac{1}{2}\right)\left(z^2-z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{z^2+2z+1}{z^4+\frac{1}{4}}.$$

För att överföra detta till en differensfunktion, så multiplicerar vi först med z^{-4} i täljare och nämnare. Då får vi

$$H[z] = \frac{z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4}}{1+\frac{1}{4}z^{-4}} = \frac{Y[z]}{X[z]}.$$

Detta ger oss

$$\left(1+\frac{1}{4}z^{-4}\right)Y[z] = (z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4})X[z].$$

Inverstransform (F&T, sid. 59) ger differensekvationen

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-4] = x[n-2] + 2x[n-3] + x[n-4].$$

b. Systemet är kausalt och alla dess poler ligger innanför enhetscirkeln. Närmare bestämt är konvergensområdet $|z| > \sqrt{1/2}$. Enhetscirkeln ingår i konvergensområdet, och därmed är systemet stabilt.

c. Insignalen är den stationära sinussignalen

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right).$$

Enligt sinus-in-sinus-ut-principen, så ges utsignalen då av

$$y[n] = \left|H\left[e^{j\pi/2}\right]\right| \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \arg\left\{H\left[e^{j\pi/2}\right]\right\}\right).$$

Vi har

$$H\left[e^{j\pi/2}\right] = \frac{e^{j\pi}+2e^{j\pi/2}+1}{e^{j2\pi}+\frac{1}{4}} = \frac{-1+j2+1}{1+\frac{1}{4}} = j\frac{8}{5},$$

och därmed

$$\left|H\left[e^{j\pi/2}\right]\right| = \frac{8}{5}, \qquad \arg\left\{H\left[e^{j\pi/2}\right]\right\} = \frac{\pi}{2}.$$

Slutligen ger detta oss utsignalen

$$y[n] = \frac{8}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right).$$

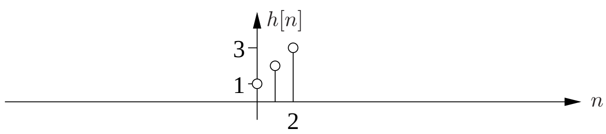
Svar:
a. $y[n] + \frac{1}{4}y[n-4] = x[n-2] + 2x[n-3] + x[n-4]$.
b. Systemet är stabilt.
c. $y[n] = \frac{8}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}(n+1)\right)$.

2

Vi har ett LTI-system med impulssvar

$$h[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2].$$

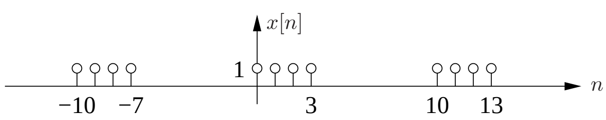
Grafiskt:



Insignalen till detta system är periodisk med period 10 enligt

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n < 4, \\ 0, & 4 \le n < 10. \end{cases} \quad \text{och} \quad x[n-10] = x[n].$$

Nedan visas tre perioder av signalen.



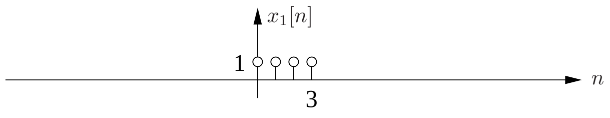
Låt $x_1[n]$ vara en period av $x[n]$ enligt

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n < 4, \\ 0, & \text{f.ö.}, \end{cases}$$

vilket också kan skrivas

$$x_1[n] = \sum_{k=0}^{3} \delta[n-k].$$

Grafiskt:



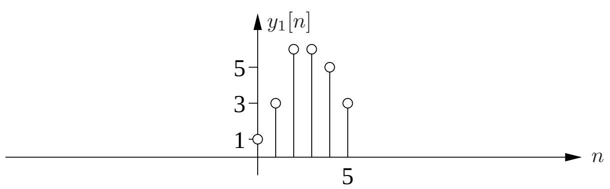
Utsignalen $y_1[n]$ när $x_1[n]$ är insignal ges då av faltningen

$$\begin{aligned} y_1[n] = (x_1 * h)[n] &= \sum_{k=0}^{3} h[n-k] \\ &= \sum_{k=0}^{3} \delta[n-k] + 2\delta[n-k-1] + 3\delta[n-k-2] \\ &= \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] \\ &\quad + \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3] \\ &\quad + \delta[n-2] + 2\delta[n-3] + 3\delta[n-4] \\ &\quad + \delta[n-3] + 2\delta[n-4] + 3\delta[n-5] \\ &= \delta[n] + 3\delta[n-1] + 6\delta[n-2] \\ &\quad + 6\delta[n-3] + 5\delta[n-4] + 3\delta[n-5], \end{aligned}$$

vilket också kan skrivas

$$y_1[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 3, & n \in \{1, 5\}, \\ 6, & n \in \{2, 3\}, \\ 5, & n = 4, \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$$

Grafiskt:



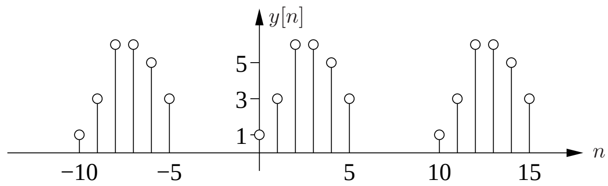
Insignalen $x[n]$ kan skrivas som

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[n-10m].$$

Systemet är LTI. Alltså har vi utsignalen

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_1[n-10m] \\ &= \begin{cases} 1, & n = 0 \pmod{10}, \\ 3, & n \in \{1, 5\} \pmod{10}, \\ 6, & n \in \{2, 3\} \pmod{10}, \\ 5, & n = 4 \pmod{10}, \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nedan visas tre perioder av utsignalen.

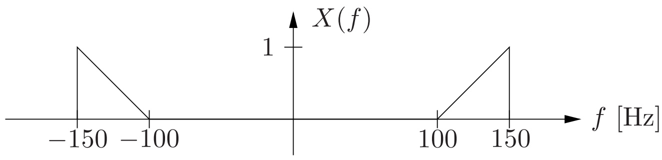


Svar: $y[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \ (\text{mod } 10), \\ 3, & n \in \{1, 5\} \ (\text{mod } 10), \\ 6, & n \in \{2, 3\} \ (\text{mod } 10), \\ 5, & n = 4 \ (\text{mod } 10), \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$

samt figur ovan.

3

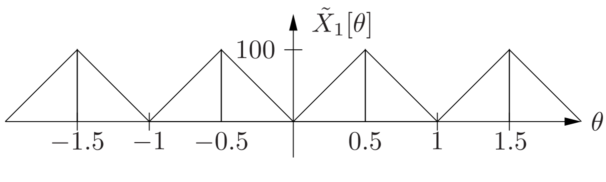
Vi är givna en signal med spektrum $X(f)$ enligt nedan.



Den ska samplas. Vi börjar med att betrakta fallet då sampelfrekvensen ges av $f_s = 100\,\text{Hz}$. Låt $\tilde{X}[\theta]$ beteckna fouriertransformen av den samplade signalen. Vi har enligt F&T på sidan 13 uttrycket

$$\tilde{X}[\theta] = f_s \sum_k X\big((\theta - k) f_s\big),$$

där vi uttryckt sambandet i termer av naturlig frekvens och normerad frekvens. Grafiskt får vi då



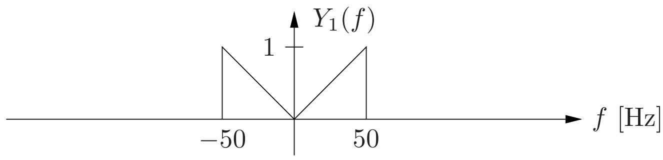
Signalen rekonstrueras idealt, dvs. rekonstruktionspulsen har fouriertransform

$$P(f) = \begin{cases} 1/f_s, & |f| < f_s/2, \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases} = \begin{cases} 0.01, & |f| < 50, \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$$

och utsignalens spektrum ges av

$$Y_1(f) = P(f)\tilde{X}_1[f/f_s] = \begin{cases} \frac{1}{f_s}\tilde{X}_1[f/f_s], & |f| < f_s/2, \\ 0, & \text{f.ö.} \end{cases}$$

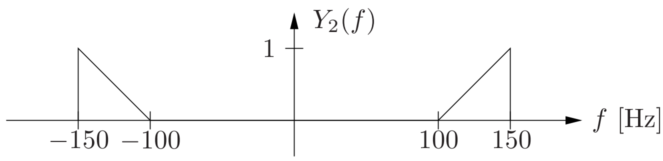
Utsignalens fouriertransform ser då ut så:



Sedan har vi fallet $f_s = 400\,\text{Hz}$. Här är insignalens bandbredd mindre än $f_s/2$. Då sker ingen vikning, och den ideala rekonstruktionen återskapar den ursprungliga signalen. Vi får då utsignalen

$$Y_2(f) = X(f),$$

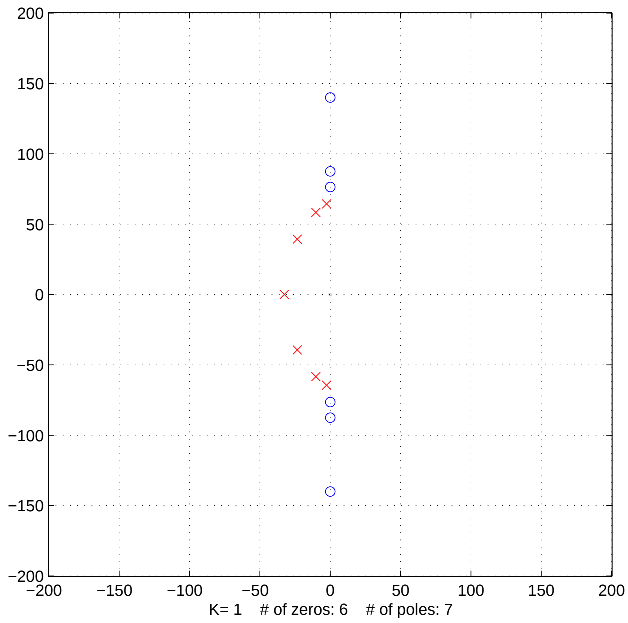
vilket fortfarande ser ut så:



Svar: Figurer av $Y_1(f)$ och $Y_2(f)$ ovan.

4

Vi var givna pol-nollställe-diagrammet för ett sjunde ordningens tidskontinuerligt s.k. cauerfilter av LP-typ med gränsfrekvens $f_p = 10\,\text{Hz}$.



Detta filter ska överföras till ett tidsdiskret filter med hjälp av bilinjär transformation.

a. Referensfiltret har gränsvinkelfrekvens $\omega_p = 2\pi f_p = 20\pi$. Det tidsdiskreta filtret ska ha normerad gränsfrekvens $\theta_s = 0.15$, vilket ger oss normerade gränsvinkelfrekvensen $\Omega_p = 2\pi\theta_p = 0.3\pi$. För att bestämma transformationskonstanten γ i den bilinjära transformationen, så använder vi sambandet

$$\omega_p = \gamma \tan(\Omega_p/2)$$

från sidan 32 i formelsamlingen. Det skriver vi då om som

$$\gamma = \frac{\omega_p}{\tan(\Omega_p/2)} = \frac{20\pi}{\tan(0.15\pi)} \approx 123.3$$

b. Låt $\tilde{H}[z]$ vara systemfuntktionen för det tidsdiskreta filtret och låt $H(s)$ vara systemfunktionen för referensfiltret. Låt vidare n_k, $k \in \{1, 2, \ldots, 6$, vara referensfiltrets nollställen, och låt p_m, $m \in \{1, 2, \ldots, 7$, vara referensfiltrets poler. Då har vi

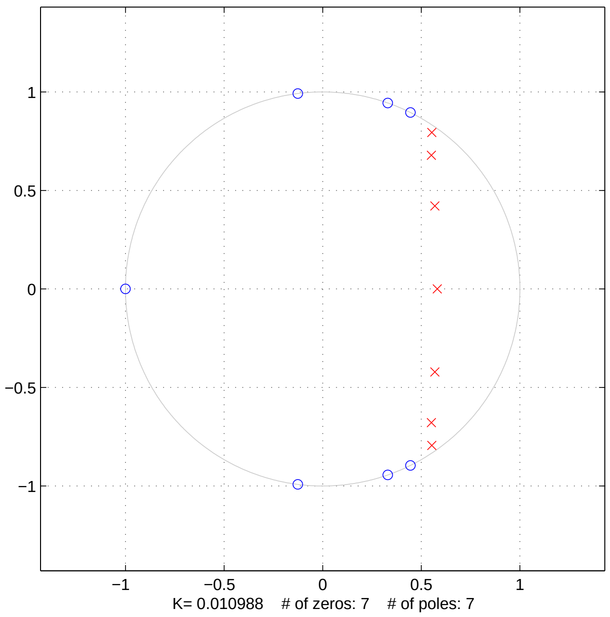
$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^{6}(s - n_k)}{\prod_{m=1}^{7}(s - p_m)}$$

Den bilinjära transformationen ger oss

$$\tilde{H}[z] = H\left(\gamma \frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\prod_{k=1}^{6}\left(\gamma \frac{z-1}{z+1} - n_k\right)}{\prod_{m=1}^{7}\left(\gamma \frac{z-1}{z+1} - p_m\right)}$$

$$= \frac{(z+1)\prod_{k=1}^{6}\big(\gamma(z-1) - n_k(z+1)\big)}{\prod_{m=1}^{7}\big(\gamma(z-1) - p_m(z+1)\big)}$$

Vi noterar här att eftersom referensfiltret har en pol mer än antalet nollställen, så får det tidsdiskreta filtret ett nollställe i -1. Pol-nollställe-diagram för det tidsdiskreta filtret:



Alla poler och nollställen är enkla.

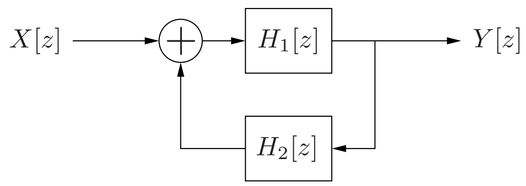
De exakta placeringarna av poler och nollställen är här inte viktiga för full poäng. Vad som är väsentligt är att alla nollställen ligger på enhetscirkeln utanför passbandet, är enkla, förekommer som komplexkonjugerade par (förutom den i -1, som för övrigt är viktig), och ungefär korrekt placerade. Vidare ska alla poler ligga innanför enhetscirkeln, i närheten av passbandet, är enkla, förekommer som komplexkonjugerade par (förutom den i ungefär 0.6) och ungefär korrekt placerade. Exakt uträknade poler och nollställen är inte viktigt.

Svar:
a. $\gamma \approx 123.3$.
b. Polnollställediagram ovan.

5

Denna uppgift innehåller ett tryckfel som i någon mån påverkar lösningen. Den återkopplade signalen skulle ha subtraherats från insignalen och inte adderas till den.

Vi var givna systemet nedan, och uppgiften gick ut på att härleda villkoren för att systemet approximativt uppträder som ett inverst system till $H_2[z]$.



Inverssystemet till $H_2[z]$ är $H_2^{-1}[z]$. Det givna systemet har systemfunktion

$$H[z] = \frac{H_1[z]}{1 - H_1[z]H_2[z]},$$

vilket vi skriver om som

$$H[z] = \frac{1}{\frac{1}{H_1[z]} - H_2[z]}.$$

Om nu $H_1[z]$ är stort, så har vi

$$H[z] \approx \frac{1}{-H_2[z]} = -H_2^{-1}[z],$$

vilket sånär som på tecknet är ett invers system till $H_2[z]$.

Detta felande tecken skulle ha försvunnit om den återkopplade signalen hade subtraherats från insignalen.

Svar: Villkoret är att $H_1[z]$ är stort (i alla fall för $z = e^{j\Omega}$). Exempelvis fungerar det att $H_1[z]$ helt enkelt är en stor förstärkning.