TSDT15 Signaler & system, del 2

Lösningar till tentan 2012-08-21

Mikael Olofsson, mikael@isy.liu.se

1

Vi har insignalen $x[n] = \delta[n+1] + \delta[n]$ till ett stabilt tidsdiskret LTI-system med frekvenssvar

$$H[\Omega] = \frac{e^{j\Omega}+1}{2e^{j\Omega}}.$$

a. Vi börjar med att bestämma fouriertransformen av insignalen som

$$X[\Omega] = e^{j\Omega} + 1.$$

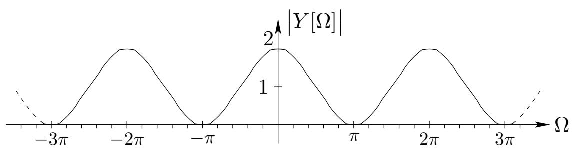
Fouriertransformen av utsignalen ges då av (LTI)

$$\begin{aligned} Y[\Omega] = X[\omega]H[\Omega] &= \frac{(e^{j\Omega}+1)^2}{2e^{j\Omega}} \\ &= \frac{(e^{j\Omega/2}+e^{-j\Omega/2})^2}{2} \\ &= 2\cos^2(\Omega/2) = 1+\cos(\Omega). \end{aligned}$$

b. Amplitudspektrumet är då

$$\big|Y[\Omega]\big| = 1 + \cos(\Omega).$$

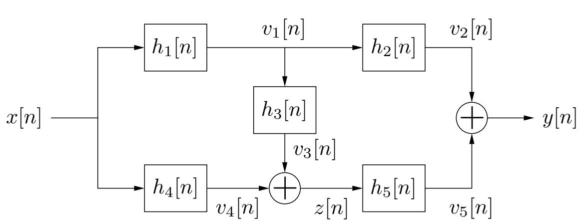
Grafiskt:



Svar:
a. $Y[\Omega] = 1 + \cos(\Omega)$
b. Se figuren ovan.

2

Vi har systemet nedan, där delsystemen är tidsdiskreta LTI-system, med impulssvar $h_i[n]$, $i \in \{1,2,3,4,5\}$.



Vi har också infört beteckningar för olika signaler i systemet.

a. Ur blockschemat kan vi enkelt hitta följande samband.

$$\begin{aligned} v_1[n] &= (x * h_1)[n], & v_2[n] &= (v_1 * h_2)[n], \\ v_3[n] &= (v_1 * h_3)[n], & v_4[n] &= (x * h_4)[n], \\ z[n] &= v_3[n] + v_4[n], & v_5[n] &= (z * h_5)[n], \\ y[n] &= v_2[h] + v_5[n]. \end{aligned}$$

Vi kombinerar dem, och får sambandet

$$\begin{aligned} y[n] &= \\ &= (x*h_1*h_2)[n] + (x*h_1*h_3*h_5)[n] + (x*h_4*h_5)[n], \\ &= \big(x * (h_1 * h_2 + h_1 * h_3 * h_5 + h_4 * h_5)\big)[n]. \end{aligned}$$

Vi identifierar i $y[n] = (x * h)[n]$, och får då impulssvaret

$$h[n] = (h_1 * h_2)[n] + (h_1 * h_3 * h_5)[n] + (h_4 * h_5)[n].$$

b. Givna impulssvar:

$$h_1[n] = \delta[n-2], \quad h_2[n] = 2u[n], \quad h_3[n] = 2^{-n}u[n],$$
$$h_4[n] = \delta[n-1], \quad h_5[n] = u[n].$$

Vi z-transformerar och får då

$$H_1[z] = z^{-2}, \quad H_2[z] = 2\frac{z}{z-1}, \quad H_3[z] = \frac{z}{z-1/2},$$
$$H_4[z] = z^{-1}, \quad H_5[z] = \frac{z}{z-1}.$$

Vi utelämnar för enkelhets skull konvergensområdena här. Vi återkommer till det i lösningen till deluppgift c. Vi z-transformerar uttrycket för $h[n]$ från deluppgift a, och får systemfunktionen

$$\begin{aligned} H[z] &= H_1[z]H_2[z] + H_1[z]H_3[z]H_5[z] + H_4[z]H_5[z] \\ &= z^{-2}2\frac{z}{z-1} + z^{-2}\frac{z}{z-1/2}\frac{z}{z-1} + z^{-1}\frac{z}{z-1} \\ &= \frac{2z^{-1}(z-\frac{1}{2}) + 1 + z - \frac{1}{2}}{(z-1/2)(z-1)} = \frac{z + \frac{5}{2} - z^{-1}}{z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{z^{-1}\frac{5}{2}z^{-2} - z^{-3}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}. \end{aligned}$$

Vi identifierar i $Y[z] = H[z]X[z]$, och finner då

$$\left(1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)Y[z]=\left(z^{-1}+\frac{5}{2}z^{-2}-z^{-3}\right)X[z].$$

Inversa z-transformen av detta är

$$y[n]-\frac{3}{2}y[n-1]+\frac{1}{2}y[n-2]=x[n-1]+\frac{5}{2}x[n-2]-x[n-3],$$

vilket är den efterfrågade differensekvation. (3p)

c. Systemet har poler i 1/2 och 1, och två nollställen som i alla fall inte kancellerar någon av dessa poler. Alla delsystem är kausala LTI-system. Alltså är hela systemet också ett kausalt LTI-system. Polen som har störst belopp avgör då konvergensområdet, vilket alltså är $|z| > 1$. Enhetscirkeln utgör alltså rand till konvergensområdet, och det finns inga multipelpoler på enhetscirkeln. Alltså är systemet marginellt stabilt.

Svar:

a. $h[n] = (h_1 * h_2)[n] + (h_1 * h_3 * h_5)[n] + (h_4 * h_5)[n]$

b. $y[n]-\frac{3}{2}y[n-1]+\frac{1}{2}y[n-2]=x[n-1]+\frac{5}{2}x[n-2]-x[n-3]$

c. Systemet är marginellt stabilt.

3

Vi har ett kausalt tidsdiskret system beskrivs av differensekvationen

$$y[n] - 2y[n-2] = x[n] + x[n-2],$$

där $x[n]$ är insignal och $y[n]$ är utsignal.

a. Vi z-transformerar differensekvationen och får då

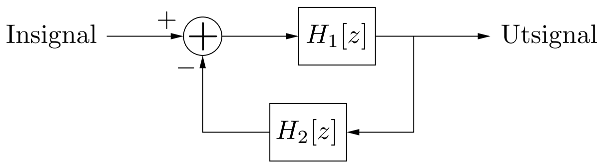
$$(1 - 2z^{-2})Y[z] = (1 + z^{-2})X[z]$$

Låt nu $H_1[z]$ vara systemfunktionen för detta system. Vi har då

$$H_1[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{1+z^{-2}}{1-2z^{-2}} = \frac{z^2+1}{z^2-2} = \frac{(z+j)(z-j)}{(z+\sqrt{2})(z-\sqrt{2})}.$$

Systemet är kausalt och vi har poler med belopp $\sqrt{2}$. Alltså har systemfunktionen konvergensområdet $|z| > \sqrt{2}$ och enhetscirkeln ingår alltså inte i konvergensområdet. Följaktligen är systemet instabilt.

b. Vi ska stabilisera systemet med hjälp av återkoppling, dvs. vi har följande figur, där $H_1[z]$ är vårt givna system, och där $H_2[z]$ är återkopplingssystemet som vi får välja fritt.



Det resulterande systemet har systemfunktion

$$H[z] = \frac{H_1[z]}{1 + H_1[z]H_2[z]}.$$

Vi provar med att låta återkopplingssystemet vara en enkel förstärkning. Alltså har vi $H_2[z] = K$ för något reellt K. Systemfunktionen blir då

$$H[z] = \frac{z^2+1}{z^2-2+K(z^2+1)} = \frac{z^2+1}{(K+1)z^2+K-2}.$$

Det resulterande systemet ska vara ett FIR-filter. Sådana har alla sina poler i origo. Det uppnår vi om konstanttermen i nämnaren är 0. Alltså:

$$K-2=0 \quad\Rightarrow\quad K=2 \quad\Rightarrow\quad H[z] = \frac{z^2+1}{3z^2}.$$

För att verifiera att systemet verkligen blivit stabilt undersöker vi systemfunktionens konvergensområde. Det totala systemet är kausalt eftersom det består av kausala delsystem. Alla poler är i origo. Alltså är konvergensområdet $|z| > 0$ för $H[z]$, och systemet är stabilt.

c. Vi söker det resulterande systemets impulssvar. Vi skriver om systemfunktionen som

$$H[z] = \frac{1}{3}(1 + z^{-2}).$$

Den inversa z-transformen ger oss då

$$h[n] = \frac{1}{3}\big(\delta[n] + \delta[n-2]\big).$$

Uppenbart ett FIR-filter.

Svar:

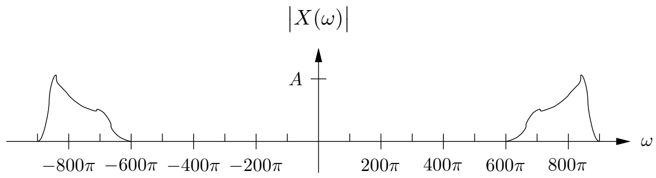
a. Verifierat enligt ovan.

b. Återkopplingssystem $H_2[z] = 2$ fungerar bra.

c. $h[n] = \frac{1}{3}\big(\delta[n] + \delta[n-2]\big)$.

4

Vi har en reellvärd tidskontinuerlig signal, $x(t)$, med följande amplitudspektrum.

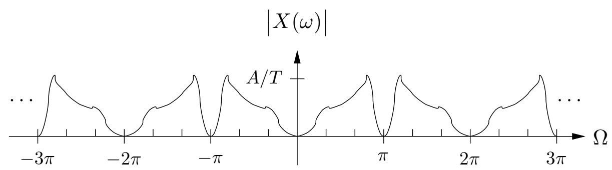


Den väsentliga observationen är att signalens amplitudspektrum är nollskilt för vinkelfrekvenser i intervallen $600\pi < |\omega| < 900\pi$. Signalen samplas med samplingsfrekvensen $f_s = 1/T$, och vi får den tidsdiskreta signalen $z[n] = x(nT)$.

a. Vi söker den minsta samplingsfrekvens som kan användas, utan att någon information går förlorad i samplingen. Poissons summationsformel (F&T, s. 13) gäller då:

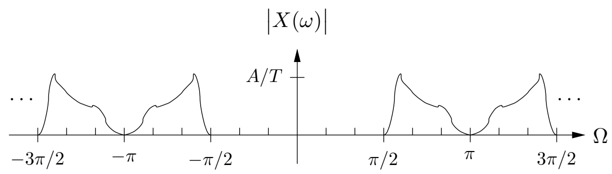
$$Z[\Omega] = \sum_k X\left(\frac{\Omega - k2\pi}{T}\right).$$

Alltså adderar vi frekvensskiftade kopior av en frekvensskalad och amplitudskalad version av ursprungsspektrat. För att undgå att information går förlorad måste vi se till att dessa kopior inte överlappar. I allra bästa fall uppnår vi det genom att delarna av kopiorna ligger precis kant-i-kant. Det uppnår vi med sampelfrekvensen 300 Hz. Vi får då det tidsdiskreta spektrat nedan.



Om vi skulle använda en sampelfrekvens som är mindre än 300 Hz, så skulle vi med nödvändighet få överlapp. Det bör noteras att inte alla sampelfrekvenser större än 300 Hz fungerar heller. Även då kan det gå dåligt. Närmare bestämt fungerar det om sampelfrekvensen uppfyller $f_s = 300$ Hz, $450\text{ Hz} \leq f_s \leq 600\text{ Hz}$ eller $f_s \geq 900$ Hz.

b. Med sampelfrekvens $f_s = 600$ Hz får vi följande tidsdiskreta spektrum:



För att få tillbaka ursprungsspektrat med hjälp av PAM, bör vi först studera det spektrala sambandet som gäller. Låt $Y(\omega)$ vara utsignalens spektrum. Då gäller enligt F&T, s. 13,

$$Y(\omega) = P(\omega)Z[\omega T],$$

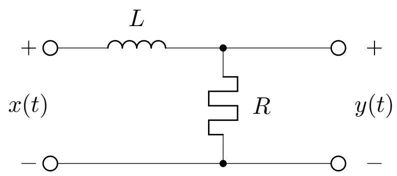
där $P(\omega)$ är pulsformens spektrum. För att få $Y(\omega) = X(\omega)$, så måste vi ha $P(\omega) = T$ i de önskade frekvensintervallen $600\pi < |\omega| < 900\pi$, för att kompensera för faktorn $1/T$ i Poissons summationsformel. Vidare måste $P(\omega) = 0$ gälla för alla andra intervall där $Z[\omega T]$ är nollskild. För de frekvenser där $Z[\omega T]$ är noll finns inga krav på $P(\omega)$. Ett exempel på en pulsform som fungerar är den som har spektrum

$$P(\omega) = \begin{cases} T, & 600\pi < |\omega| < 900\pi, \\ 0, & \text{för övrigt.} \end{cases}$$

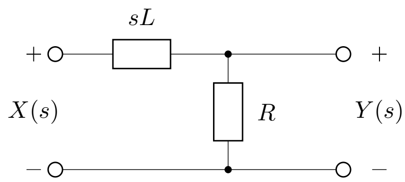
Svar: —

5

Vi var givna följande referensfilter, där spänningen $x(t)$ är insignal och spänningen $y(t)$ är utsignal.



Motsvarande laplace-operator-schema:



Med spänningsdelning får vi

$$Y(s) = \frac{R}{sL + R} X(s).$$

Filtret är uppenbart ett lågpassfilter.

a. Låt $H_{\text{LP}}(s)$ beteckna referensfiltrets systemfunktion. Då har vi

$$H_{\text{LP}}(s) = \frac{R}{sL + R} = \frac{\omega_{\text{p,LP}}}{s + \omega_{\text{p,LP}}},$$

med 3 dB-gränsvinkelfrekvens $\omega_{\text{p,LP}} = R/L$. Då målet är ett tidsdiskret HP-filter, så vill vi nu överföra $H_{\text{LP}}(s)$ till en systemfunktion $H_{\text{HP}}(s)$ för ett tidskontinuerligt HP-filter. Det gör vi med LP-HP-transformation enligt F&T, s. 26. Låt $\omega_{\text{p,HP}}$.

beteckna detta 3 dB-gränsvinkelfrekvensen för detta HP-filter. Då har vi Detta vill vi nu överföra till

$$\omega_{\mathrm{I}}^2 = \omega_{\mathrm{p,LP}}\omega_{\mathrm{p,HP}},$$

$$H_{\mathrm{HP}}(s) = H_{\mathrm{LP}}\left(\frac{\omega_{\mathrm{I}}^2}{s}\right) = \frac{\omega_{\mathrm{p,LP}}}{\frac{\omega_{\mathrm{I}}^2}{s} + \omega_{\mathrm{p,LP}}} = \frac{s}{s+\omega_{\mathrm{p,HP}}}.$$

Vi vill nu använda bilinjär tranformation för att överföra detta till ett tidsdiskret HP-filter med normerad gränsvinkelfrekvens Ω_0. Då har vi enligt F&T, s. 32,

$$\omega_{\mathrm{p,HP}} = \gamma \tan\left(\frac{\Omega_0}{2}\right) \quad\Rightarrow\quad \gamma = \frac{\omega_{\mathrm{p,HP}}}{\tan\left(\frac{\Omega_0}{2}\right)}$$

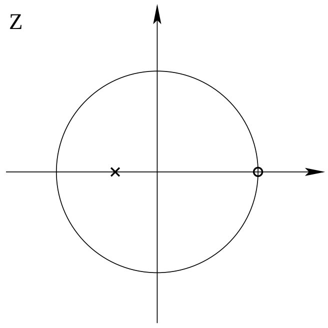
Då får vi systemfunktionen $H[z]$ för det resulterande tidsdiskreta filtret som

$$\begin{aligned} H[z] &= H_{\mathrm{HP}}\left(\gamma\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\gamma\frac{z-1}{z+1}}{\gamma\frac{z-1}{z+1}+\omega_{\mathrm{p,HP}}} \\ &= \frac{\frac{\omega_{\mathrm{p,HP}}}{\tan\left(\frac{\Omega_0}{2}\right)}\cdot\frac{z-1}{z+1}}{\frac{\omega_{\mathrm{p,HP}}}{\tan\left(\frac{\Omega_0}{2}\right)}\cdot\frac{z-1}{z+1}+\omega_{\mathrm{p,HP}}} \\ &= \frac{z-1}{z-1+\tan\left(\frac{\Omega_0}{2}\right)(z+1)} \end{aligned}$$

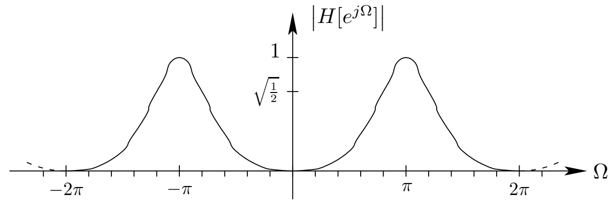
b. Med $\Omega_0 = 3\pi/4$ insatt i $H[z]$ ovan får vi

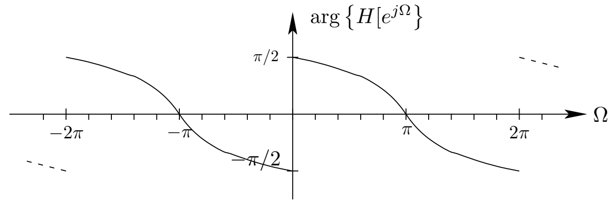
$$H[z] = \frac{z-1}{z-1+\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)(z+1)} = \frac{z-1}{(2+\sqrt{2})z+\sqrt{2}},$$

där vi har utnyttjat det givna sambandet $\tan(3\pi/8) = \sqrt{2}+1$. Systemets pol-nolställe-diagram:



Med gängse metod för att extrahera amplitud- och faskarakteristik ur pol-nollställe-diagram får vi följande figurer.





Analytiskt: Systemets frekvenssvar:

$$H[e^{j\Omega}] = \frac{e^{j\Omega}-1}{(2+\sqrt{2})e^{j\Omega}+\sqrt{2}},$$

Amplitudspektrum:

$$\begin{aligned} &\left|H[e^{j\Omega}]\right| = \\ &= \sqrt{\frac{\left(\cos(\Omega)-1\right)^2+\sin^2(\Omega)}{\left((2+\sqrt{2})\cos(\Omega)+\sqrt{2}\right)^2+(2+\sqrt{2})^2\sin^2(\Omega)}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\cos(\Omega)}{4+\sqrt{8}+(2+\sqrt{8})\cos(\Omega)}}. \end{aligned}$$

Fasspektrum:

$$\begin{aligned} &\arg\left\{H[e^{j\Omega}]\right\} = \\ &= \arg\left\{e^{j\Omega}-1\right\} - \arg\left\{(2+\sqrt{2})e^{j\Omega}+\sqrt{2}\right\} \\ &= \pi - \arctan\left(\frac{\sin(\Omega)}{1-\cos(\Omega)}\right) - \arctan\left(\frac{\sin(\Omega)}{(2+\sqrt{2})\cos(\Omega)+\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

vilket gäller för alla Ω utom $\Omega = k2\pi$, där k är heltal. I det fallet är $\arg\left\{H[e^{j\Omega}]\right\}$ odefinierat. Det är stegen i grafen ovan.

Svar:

a. $H[z] = \frac{z-1}{z-1+\tan\left(\frac{\Omega_0}{2}\right)(z+1)}$

b. $\left|H[e^{j\Omega}]\right| = \sqrt{\frac{1-\cos(\Omega)}{4+\sqrt{8}+(2+\sqrt{8})\cos(\Omega)}}$

$\arg\left\{H[e^{j\Omega}]\right\} =$

$= \pi - \arctan\left(\frac{\sin(\Omega)}{1-\cos(\Omega)}\right) - \arctan\left(\frac{\sin(\Omega)}{(2+\sqrt{2})\cos(\Omega)+\sqrt{2}}\right)$

Graphs above.