TSDT 07 Felrättande koder, 2007-03-10

Lösning 1

$n = 2 : H = [1, 0]$, $C = \{00, 01\}$, $d = 1$.

$n = 4 : H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \{0000, 0110, 1001, 1111\}$, $d = 2$.

$n = 6$:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6].$$

Alla kolumner olika, således $d \geq 3$. Men $h_0 + h_1 = h_5$, varav $d \leq 3$. Således: $d = 3$.

$n \geq 8 : H = [h_1, h_2, \ldots, h_n]$. Låt $n = 2s$. Vi har $h_1 + h_2 = h_{s+1} + h_{s+2}$, varav $d \leq 4$. Alla kolumner är olika, varav $d \geq 3$. Betrakta summan av tre kolumner, säg $h_i + h_j + h_k$, med $1 \leq i < j < k \leq n = 2s$. Vi har följande fall:

$i, j, k \leq s$: $w_H(h_i + h_j + h_k) = 3$,

$i, j \leq s,\ k > s$: $w_H(h_i + h_j) = 2$, $w_H(h_k) = s - 1 > 2$,

$i \leq s,\ j, k > s$: $w_H(h_i) = 1,\ w_H(h_j + h_k) = 2$,

$i, j, k > s$: $w_H(h_i + h_j + h_k) = s - 3 \geq 1$.

Samtliga fall är oförenliga med villkoret $h_i + h_j + h_k = 0$. Således: $d = 4$ för $n \geq 8$.

Lösning 2

Sylvesterkonstruktionen ger följande Hadamardmatris av ordning $s = 4$:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Avbildninen $1 \mapsto 0$, $-1 \mapsto 1$ ger följande kod över $\mathbb{F}_2$:

0000	0101	0011	0110
1111	1010	1100	1001

Generatormatris G och paritetsmatris H kan väljas på följande sätt:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I, P], \quad H = [P^T, I] = [1, 1, 1, 1].$$

Lösning 3

Villkoren $c = (c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) \in \mathbb{F}_2^6$ och $Hc^T = 0$ ger följande ekvationer i $\mathbb{F}_2$:

$$c_0 = c_3, \quad c_4 = c_5, \quad c_1 = c_4, \quad c_3 = c_5, \quad c_2 = c_5, \quad c_3 = c_4.$$

Således $C = \{000000, 111111\}$, varav $[n, k, d] = [6, 1, 6]$.

Lösning 4

Vi har $r = (2, 3, 7, 8)$. Med relationen $(4) = (0, 1)$ får vi $s_1 = r(\alpha) = (2, 3, 0, 1, 3, 0, 2) = (1) = \alpha$, $s_3 = r(\alpha^3) = (6, 9, 6, 9) = (\emptyset) = 0$, varav $\sigma_1 = s_1 = \alpha$, $\sigma_2 = (s_1^3 + s_3)/s_1 = s_1^2 = \alpha^2$. Således: $\sigma(z) = 1 + \sigma_1 z + \sigma_2 z^2 = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2$, varav $\sigma(z) = 0$ för $\alpha z = \omega, \omega^2$, där $\omega = \alpha^5$ satisfierar $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Således: $\sigma(z) = 0$ för $z = \alpha^4, \alpha^9$, varav $e = (6, 11)$, $c = (2, 3, 6, 7, 8, 11)$.

Lösning 5

Vi har $g(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Varje kodord $c(x)$ satisfierar således följande ekvationer: $c(1) = c(2) = c(3) = 0$. Med $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) = (u, 1, 2, v, z, 3)$ har vi

i	0	1	2	3	4	5
c_i	u	1	2	v	z	3
2^i	1	2	4	1	2	4
3^i	1	3	2	6	4	5

varav

$$\begin{aligned} c(1) &= u + 1 + 2 + v + z + 3 = 0, \\ c(2) &= u + 2 + 1 + v + 2z + 5 = 0, \\ c(3) &= u + 3 + 4 + 6v + 4z + 1 = 0. \end{aligned}$$

Efter hyfsning får vi

$$\begin{aligned} u + v + z &= 1, \\ u + v + 2z &= 6, \\ u + 6v + 4z &= 6, \end{aligned}$$

med lösningen $(u, v, z) = (5, 5, 5)$. Således: $c = (5, 1, 2, 5, 5, 3)$.