TSDT 07 Felrättande koder, 2005-03-10

Lösning 1

Varje kombination av $\rho = 3$ suddningar kan korrigeras om och endast om $\rho = 3 < d$. Således krävs $d \geq 4$. Med $n = 2^m = 8$ fås $m = 3$. Med $d = 2^{m-r} = 4$ fås $r = 1$, varav

$$k = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i} = 1 + 3 = 4.$$

Således: $(r, m) = (1, 3)$, $[n, k, d] = [8, 4, 4]$. Generatormatris:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lösning 2

Med $n = 11$ fås $\mathcal{QR} = \{1, 3, 4, 5, 9\}$, $\mathcal{NR} = \{2, 6, 7, 8, 10\}$. Låt H vara en Paley-matris av ordningen 12, där första kolumn och första rad består av enbart ettor. Stryk första kolumnen och låt C definieras av raderna i den reducerade matrisen enligt transformationen $1 \to 0$, $-1 \to 1$. Vi får

$$c_i = \begin{cases} 0, & i \in \mathcal{QR}, \\ 1, & i \in \mathcal{NR} \cup \{0\}. \end{cases}, \quad i = 0, 1, \ldots, 10.$$

Således: $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{10}) = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$.

Lösning 3

$q = 2$, $n = 9$. Cyklotomiska sidoklasser:

$$C_0 = \{0\}, \quad m_0(x) = x + 1,$$

$$C_1 = \{1, 2, 4, 8, 7, 5\}, \quad m_1(x) = x^6 + x^3 + 1,$$

$$C_3 = \{3, 6\}, \quad m_3(x) = x^2 + x + 1.$$

Minimalpolynomen $m_0(x), m_3(x)$ är triviala; polynomet $m_1(x)$ erhålls genom en enkel division. Med $g(x) = m_1(x)$ fås $g(\alpha) = g(\alpha^2) = 0$, vilket garanterar enkelfelskorrigering. Vi får $\dim\{C\} = n - \deg\{g(x)\} = 9 - 6 = 3$.

Lösning 4

$q = 2$, $n = 21$. Cyklotomiska sidoklasser:

$$\begin{array}{ll} C_0 = \{0\}, & C_1 = \{1,2,4,8,16,11\}, \\ C_3 = \{3,6,12\}, & C_5 = \{5,10,20,19,17,13\}, \\ C_7 = \{7,4\} & C_9 = \{9,18,15\}. \end{array}$$

Låt $r = \deg\{g(x)\}$. Vi har $r = r_0 + 6r_1 + 3r_3 + 6r_5 + 2r_7$, där $r_i \in \{0,1\}$. En enkel överläggning visar att $k = n - r$ kan anta *alla* värden i intervallet $1 \leq k \leq n = 21$.

Lösning 5

Varje personnummer är entydigt bestämt av 9 decimala siffror. Representera dem i alfabetet $\mathbb{Z}_q$, där $q = 11$. Välj en RS-kod med $n = q = 11$. Med $k = 9$ informationssymboler kan alla möjliga personnummer representeras. Vi får $d = n - k + 1 = 3$, vilket medger enkelfelskorrigering.

Eftersom antalet möjliga personnummer är mindre än $100 \cdot 12 \cdot 31 \cdot 1000 = 372 \cdot 10^5 < 10^8$ skulle enkelfelskorrigering i princip vara möjlig även med tiosiffriga personnummer, men då skulle man vara tvungen att överge den systematiska representationen.