ETE306 Diskret matematik
Lösningsförslag/Svar till tentamen 2017-10-28

Danyo Danev

1
Den angivna ekvationen är ekvivalent till

$$128x + 81y = 593.$$

Lösningarna till denna ekvation är

$$(x, y) = (81n - 18383, 29057 - 128n) = (81n + 4, 1 - 128n),$$

där n är godtyckligt heltal. Den enda lösningen där både x och y är positiva är $(x, y) = (4, 1)$.

2
Låt A_1 vara mängden av alla permutationer av alfabetet som innehåller ordet **FLÄSK**. På samma sätt definerar vi mängdena A_2, A_3 och A_4 för orden **MYRA, SKÅP** och **PLOG**. Vi söker storleken av $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$. Den får vi enligt följande:

$$\begin{aligned}
|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| &= 28! - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| \\
&\quad + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| \\
&\quad + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| \\
&\quad + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\
&\quad - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\quad - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&= 28! - 3 \cdot 25! - 24! \\
&\quad + 4 \cdot 22! + 21! - 2 \cdot 19!.
\end{aligned}$$

3

Visa med induktion att $a_n = n(n+1)$ för $n \geq 0$.

4
Det kromatiska plynomet är

$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)^4$$

som leder till att det kromatiska talet är $\chi(G) = 4$.

5

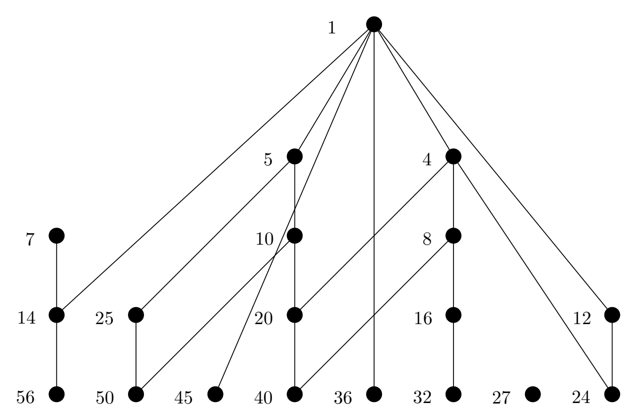
Först visar vi att relationen är en partialordning.

(R) Vi har $x\mathcal{R}x$ ty $\frac{x}{x} = 1$.

(AS) Om vi har $x\mathcal{R}y$ samt $x\mathcal{R}y$ då $\frac{x}{y} \geq 1$ och $\frac{y}{x} \geq 1$ som leder till $x = y$.

(T) Låt $x\mathcal{R}y$ och $y\mathcal{R}z$. Om $z = y$ då är $x\mathcal{R}z$. Låt $z < y$. Vi har $\frac{x}{z} = \frac{x}{y}\frac{y}{z}$ och eftersom $\frac{x}{y}$ är heltal varje delare till $\frac{y}{z}$ är också delare till $\frac{x}{z}$. Detta ger att antingen 2 eller 5 är delare till $\frac{x}{z}$ dvs $x\mathcal{R}z$.

Följande figur ger Hassediagrammet.



Från figuren kan vi se att det finns 8 stycken minimala element 24, 27, 32, 36, 40, 45, 50 och 56. Maximala element är 1, 7 och 27.

6

Resten blir 21. Observera att $2017 \equiv 17 \pmod{41}$ och att

$$\begin{aligned}
5^1 &\equiv 5 \pmod{41},\\
5^2 &\equiv -16 \pmod{41},\\
5^4 &\equiv 10 \pmod{41},\\
5^8 &\equiv 18 \pmod{41},\\
5^{16} &\equiv -4 \pmod{41}.
\end{aligned}$$

7

Svar

(a) $\binom{33+5-1}{5-1} = \binom{37}{4}$;

(b) $\binom{43+4-1}{4-1} - \binom{37+4-1}{4-1} = \binom{46}{3} - \binom{40}{3}$;

(c) $\binom{39}{4} - 5\binom{31}{4} + 10\binom{23}{4} - 10\binom{15}{4} + 5\binom{7}{4}$;