ETE306 Diskret matematik
Lösningsförslag/Svar till tentamen 2017-05-31

Danyo Danev

1
Den angivna ekvationen är ekvivalent till

$$37x + 82y = 6.$$

Lösningarna till denna ekvation är

$$(x, y) = (82n - 22, 10 - 37n),$$

där n är ett godtyckligt heltal. Kravet $x > 0$ innebär $82n - 22 > 0 \iff n \gtrsim 0.2683$ som ger $n \geq 1$. Den minsta positiva x ges av $n = 1$ och då får vi $\mathbf{x = 60}$ (för detta x har vi $y = -27$).

2
Eftersom $4|4y$ för alla heltal y vi har att $x\mathcal{R}y$ är ekvivalent med $4|(x-y)$, dvs $x \equiv y(\text{mod } 4)$. Man kan lätt kolla att likhet modulo 4 är en ekvivalensrelation (visa att den är reflexiv, symmetrisk och transitiv!). Ekvivalensklasserna är:

- $[0] = \{-8, -4, 0, 4, 8\}$;
- $[1] = \{-7, -3, 1, 5\}$;
- $[2] = \{-6, -2, 2, 6\}$;
- $[3] = \{-5, -1, 3, 7\}$.

3
Det kromatiska plynomet är

$$P(G, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2(\lambda - 3)^2(\lambda^2 - 3\lambda + 3)^3.$$

som leder till att det kromatiska talet är $\chi(G) = 4$.

4
Vi använder induktionsprincipen för att bevisa att påståendet

$$P(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$$

är sant för alla heltal $n \geq 1$.

I) När $n = 1$ vi har

$$P(1): \quad \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{15} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 5},$$

dvs påståendet $P(1)$ är sant.

II) Låt oss anta att påståendet $P(l)$ är sant för något $l \geq 1$, dvs

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{l(l+2)}{3(2l+1)(2l+3)}.$$

Vi måste visa att

$$\begin{aligned} P(l+1): \quad & \textstyle\sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} \\ = \quad & \frac{(l+1)((l+1)+2)}{3(2(l+1)+1)(2(l+1)+3)} \end{aligned}$$

är också sant. Vi använder induktionsantagandet för att få

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{l+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} &= \textstyle\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} + \\ & \quad \frac{1}{(2(l+1)-1)(2(l+1)+1)(2(l+1)+3)} \\ &= \frac{l(l+2)}{3(2l+1)(2l+3)} + \\ & \quad \frac{1}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} \\ &= \frac{l(l+2)(2l+5)+3}{3(2l+1)(2l+3)(2l+5)} \\ &= \frac{2l^3+9l^2+10l+3}{3(2l+1)(2l+3)(2l+5)} \\ &= \frac{(2l+1)(l+1)(l+3)}{3(2l+1)(2l+3)(2l+5)} \\ &= \frac{(l+1)(l+3)}{3(2l+3)(2l+5)} \\ &= \frac{(l+1)((l+1)+2)}{3(2(l+1)+1)(2(l+1)+3)} \end{aligned}$$

vilket skulle visas.

Enligt induktionsprincipen är påståendet

$$P(n): \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$$

sant för alla heltal $n \geq 1$.

5

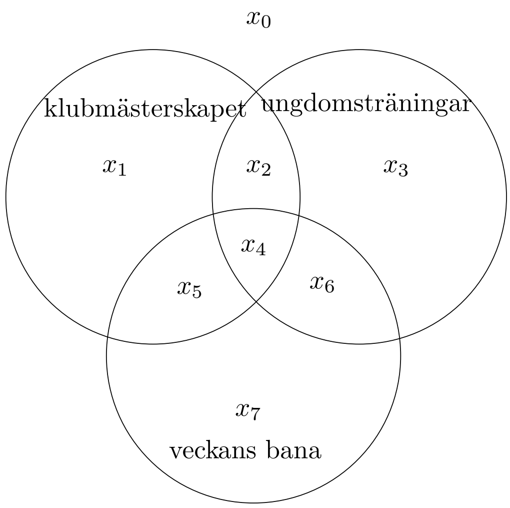
(a) $9 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 31104$.

(b) Vi har att $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ som ger svaret $6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 8640$.

(c) Vi har att $1848 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$ som ger svaret $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

6

Följande figur ger variablerna i ekvationssystemet som vi kan bilda från informationen i uppgiften.



Själva ekvationsystemet ser ut som följande.

$$
\begin{aligned}
x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &= 84 \\
x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 89 \\
x_2 + x_3 + x_4 + x_6 &= 70 \\
x_0 + x_7 &= 59 \\
x_0 + x_3 &= 51 \\
x_4 + x_6 &= 24 \\
x_0 &= 12
\end{aligned}
$$

Succesivt får vi $x_0 = 12$, $x_3 = 39$, $x_7 = 47$, $x_2 = 7$, $x_5 = 13$, $x_1 = 58$, $x_4 = 11$ och $x_6 = 13$. Alltså svaret är 11 medlemmar sysslar med alla tre uppgifter.

7

Låt A_1 vara mängden av alla permutationer av alfabetet som innehåller ordet **GLAS**. På samma sätt definerar vi mängdena A_2, A_3 och A_4 för orden **SPAK, RIV** och **KYL**. Vi söker storleken av $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$. Den får vi enligt följande:

$$
\begin{aligned}
|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| &= 28! - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| \\
&\quad +|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| \\
&\quad +|A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| \\
&\quad +|A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
&\quad -|A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\
&\quad -|A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\
&\quad -|A_1 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\quad -|A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&\quad +|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&= 28! - 2 \cdot 26! - 2 \cdot 25! \\
&\quad +24! + 3 \cdot 23! - 21!.
\end{aligned}
$$