Liten formelsamling

Mikael Olofsson och Michael Felsberg, mars 2017

Impedanser

Resistans R	$u(t) = Ri(t)$	$Z_R = R$
Induktans L	$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$	$Z_L = j\omega L$
Kapacitans C	$i(t) = C\frac{d}{dt}u(t)$	$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

Faltning

Tidskontinuerlig	$(a * b)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\tau)b(t-\tau)\,d\tau$
Tidsdiskret	$(a * b)[k] = \sum_m a[m]b[k-m]$

Filterteori

Frekvensfunktion	$H(\omega) = U_{\text{ut}}(\omega)/U_{\text{in}}(\omega)$
Amplitudkarakteristik	$\lvert H(\omega)\rvert$
Faskarakteristik	$\arg\{H(\omega)\}$
dB-begreppet (effekter)	$10 \cdot \log_{10}(P_1/P_2)$
(spänningar)	$20 \cdot \log_{10}(U_1/U_2)$
Gränsvinkelfrekvenser	Vinkelfrekvenser där $\lvert H(\omega)\rvert$ sjunkit en faktor $\sqrt{2}$ (motsv. 3 dB) från sitt max-värde.

Sampling

Sampelperiod	T_s
Sampelfrekvens	$f_\text{s} = 1/T_\text{s}$
Sampelvinkelfrekvens	$\omega_\text{s} = 2\pi/T_\text{s}$
Tidsuttryck	$y[k] = x(nT)$
Frekvensuttryck (Poisson)	$Y[\Omega] = \frac{1}{T_\text{s}}\sum_m X\left(\frac{\Omega - m2\pi}{T_\text{s}}\right) = f_\text{s}\sum_m X\big((\Omega - m2\pi)f_\text{s}\big)$

Informationsteori

Nedan antas att X är en stokastisk variabel som tar värden x_m, $m \in \{1,\dots,M\}$, med sannolikheter $p_m = \Pr\{X = x_m\}$. Vidare är Y en stokastisk variabel som tar värden y_n, $n \in \{1,\dots,N\}$, och p är en sannolikhet.

Shannoninformation	$-\log_2(p)$
Entropi	$H(X) = H(p_1,\dots,p_M) = -\sum_{m=1}^{M} p_m \log_2(p_m)$
Binära entropifunktionen	$H_2(p) = H(p, 1-p)$
Betingad entropi	$H(Y\lvert X) = \sum_m H(Y\lvert X = x_m)\cdot p_m$
där vi har	$H(Y\lvert X = x_m) =$ $= H\big(\Pr\{Y = y_1\lvert X = x_m\},\dots,\Pr\{Y = y_N\lvert X = x_m\}\big)$
Ömsesidig information	$I(X;Y) = H(Y) - H(Y\lvert X)$
Antal typiska binära sekv.	$\binom{N}{pN} \approx 2^{N\cdot H_2(p)}$

Tidskontinuerlig fourierserieutveckling

Periodtid	Det minsta $T \neq 0$ sådant att $x(t+T) = x(t)$ gäller för alla t.
Grundfrekvens	$f_0 = 1/T$
Grundvinkelfrekvens	$\omega_0 = 2\pi/T$
Transformuttryck	$D_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$
Inverstransformuttryck	$x(t) = \sum_n D_n e^{jn\omega_0 t}$

2-D Kontinuerliga Fouriertransformer

	Spatialdomän, $x, y \in \mathbf{R}$	Fourierdomän, $u, v \in \mathbf{R}$
Definition:	$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(xu+yv)}dudv$	$F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(xu+yv)}dxdy$
Reell signal:	$f(x,y)$ reell	$F(-u,-v) = F^*(u,v)$
Linjäritet:	$af_1(x,y) + bf_2(x,y)$	$aF_1(u,v) + bF_2(u,v)$
Translation, spat:	$f(x-a, y-b)$	$e^{-j2\pi(au+bv)}F(u,v)$
Translation, frekv:	$e^{j2\pi(ax+by)}f(x,y)$	$F(u-a, v-b)$
Skalning:	$f(ax, by)$	$(1/\lvert ab\rvert) \cdot F(u/a, v/b)$
Faltning:	$(f * g)(x,y)$	$F(u,v) \cdot G(u,v)$
Korrelation:	$(f \Box g)(x,y)$	$F^*(u,v) \cdot G(u,v)$
Multiplikation:	$f(x,y) \cdot g(x,y)$	$(F * G)(u,v)$
Derivering i x:	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$	$j2\pi u \cdot F(u,v)$
Derivering i y:	$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$	$j2\pi v \cdot F(u,v)$
Laplace:	$\nabla^2 f(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y)$	$-4\pi^2(u^2+v^2) \cdot F(u,v)$
Generell lintrans:	$f(\mathbf{Ax}),\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\lvert\det \mathbf{A}\rvert} F((\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{u}),\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
Rotation:	$f(\mathbf{Rx}),\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$F(\mathbf{Ru}),\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
Separabel funktion:	$f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$	$F(u,v) = G(u) \cdot H(v)$
Diracpuls:	$\delta(x,y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$	1
Box:	$\Pi(x,y) = \Pi(x) \cdot \Pi(y)$	$\mathrm{sinc}(u) \cdot \mathrm{sinc}(v)$
Böjd pyramid:	$\Lambda(x,y) = \Lambda(x) \cdot \Lambda(y)$	$\mathrm{sinc}^2(u) \cdot \mathrm{sinc}^2(v)$
Gauss:	$e^{-\pi(x^2+y^2)} = e^{-\pi x^2} \cdot e^{-\pi y^2}$	$e^{-\pi(u^2+v^2)} = e^{-\pi u^2} \cdot e^{-\pi v^2}$

Definitioner, Egenskaper och Samband

DFT och IDFT, 2D:

$$F[k,l] = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} f[n,m]\cdot e^{-j2\pi(nk/N+ml/M)},$$
$$f[n,m] = \frac{1}{NM}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} F[k,l]\cdot e^{j2\pi(nk/N+ml/M)}$$

Parseval's formel, 2D:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g^*(x,y)\,dxdy = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v)G^*(u,v)\,dudv$$

Peak Signal to Noise Ratio, PSNR (decibel, dB; M_{signal} är signalens maximala värdet):

$$\text{PSNR}_{\text{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{M_{\text{signal}}^2}{P_{\text{noise}}}\right)$$

Några diskreta faltningskärnor

- Byta från x- till y-led `hy=hx`$^{\mathrm{T}}$
- 1D ocentrerad lågpass (i x-led) `b =` $\boxed{1}\boxed{1}/2$
- 1D ocentrerad differens (i x-led) `d =` $\boxed{1}\boxed{-1}$
- 1D centrerad lågpass (i x-led) `b2=b*b`
- 2D lågpass `bb2=b2*b2`$^{\mathrm{T}}$
- Centrala differensen (i x-led) `d2=b*d`
- Sobel (i x-led) `sx=d2*b2`$^{\mathrm{T}}$
- 1D Laplace (i x-led) `l=d*d`
- 2D Laplace `ll=l+l`$^{\mathrm{T}}$

Dilation

$$a \oplus b = [a * b \geq 1]$$

Erosion (A är antal pixlar i a)

$$a \ominus b = [a \square b = A]$$